Three Moments Equation Method

طريقة معادلة الثلاثة عزوم

Indeterminate Structures

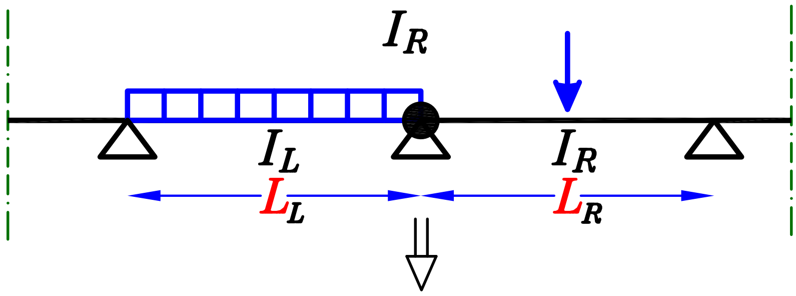
نسألكم الدعاء

Table of Contents

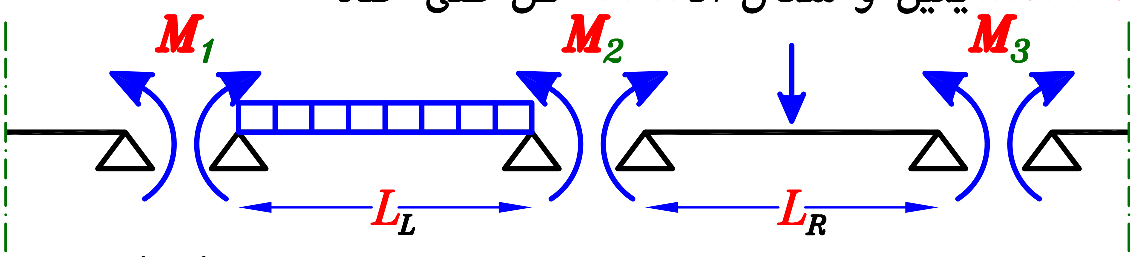
THREE MOMENTS EQUATION

هى طريقة لحل المنشآت ال*Indeterminate structures* و فكرة هذه هذه الطريقة أنه بالفصل عند ال *Supports* و بمعلومية أنه كل *Support* ال*Deflection = 0 & Slope right = Slope left* يمكننا أن نحصل على معادلة عند كل *Support* و هذه المعادلة تسمى بال*3-moment equation* و بالتعويض فى هذه المعادلة نتمكن من حساب ال *moment* عند أى *Support* .

و معادلة ال *3-moment equation* تكون كالتالى **At any Joint :**

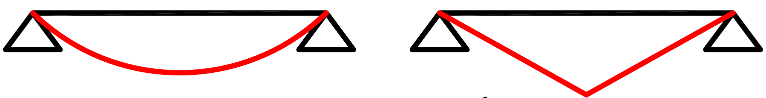


نفصل ال*members* يمين و شمال ال*Joint* كل على حده



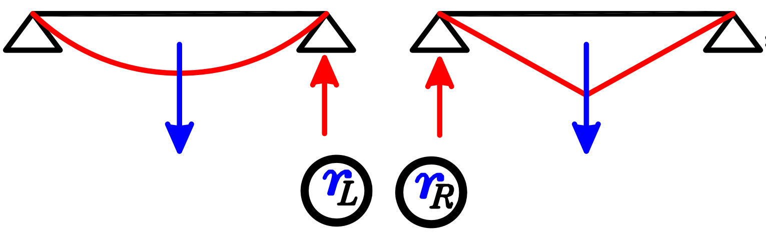
نرسم ال *moment* لكل *member* كما لو كان *Simple beam* أى أننا نهمل ال*moment* المجهول فى بداية و نهاية كل *member*

B.M.D



ثم نحسب ال *Elastic reactions* لكل جزء و سنوضحها فى الصفحة التالية

Elastic load



$$\boxed{M_1\frac{L_L}{EI_L}+2M_2\left(\frac{L_L}{EI_L}+\frac{L_R}{EI_R}\right)+M_3\frac{L_R}{EI_R}=-6\left(\frac{r_L}{EI_L}+\frac{r_R}{EI_R}\right)}$$

$M_1 \Rightarrow$ الـ moment قبل الـ Joint اللى بنطبق عندها المعادلة

$M_2 \Rightarrow$ الـ moment عند الـ Joint اللى بنطبق عندها المعادلة

$M_3 \Rightarrow$ الـ moment بعد الـ Joint اللى بنطبق عندها المعادلة

و لتحديد اشارات الـ moment

نضع الـ moment دائما يحزم الـ member و تكون الاشارات كالتالى

دائما نفرض أى عزم مجهول أنه +Ve

$r_L \Rightarrow$ الـ Elastic reaction شمال الـ Joint اللى بنطبق عندها المعادلة

$r_R \Rightarrow$ الـ Elastic reaction يمين الـ Joint اللى بنطبق عندها المعادلة

و لتحديد اشارات الـ Elastic reactions

و لحساب الـ Elastic reactions

١- نقسم المسألة بين الـ Supports الى Simple beams أى نهمل الـ moment فى بداية و نهاية كل member .

٢- نرسم الـ B.M.D على كل Simple beam نتيجة الاحمال اللى فوقها فقط .

٣- نحسب الـ Elastic load كما فى طريقة الـ Conjugate beam وذلك بحساب مساحة الـ B.M.D ووضعها كـ Load يؤثر فى C.g الـ Area .

٤- نعتبر الـ Elastic loads كأنها أحمال على الكمرة و ايجاد الـ Reactions لها فتكون هى الـ Elastic reactions .

$L_L \Rightarrow$ طول الـ member شمال الـ Joint اللى بنطبق عندها المعادلة

$L_R \Rightarrow$ طول الـ member يمين الـ Joint اللى بنطبق عندها المعادلة

$I_L \Rightarrow$ ال moment of inertia شمال ال Joint اللى بنطبق عندها المعادلة

$I_R \Rightarrow$ ال moment of inertia يمين ال Joint اللى بنطبق عندها المعادلة

$E \Rightarrow$ ال modulus of elasticity

فى حالة ثبات ال EI

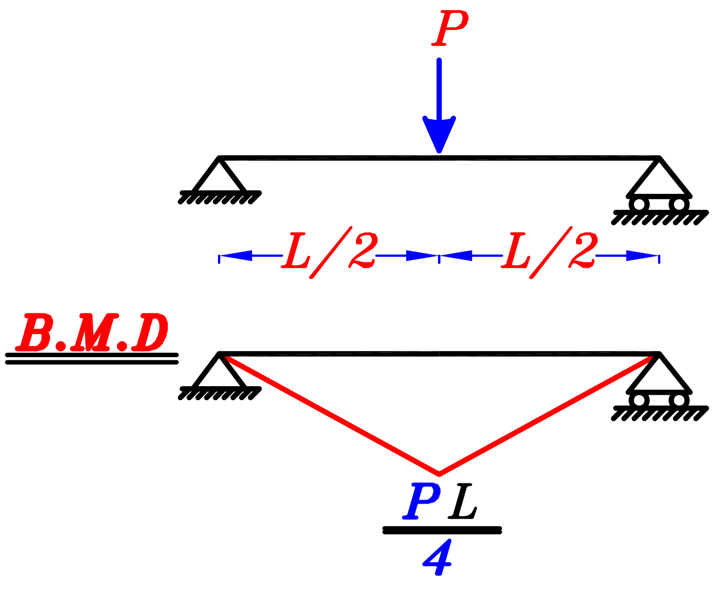
$$\boxed{M_1 \frac{L_L}{EI_L} + 2M_2\left(\frac{L_L}{EI_L} + \frac{L_R}{EI_R}\right) + M_3 \frac{L_R}{EI_R} = -6\left(\frac{r_L}{EI_L} + \frac{r_R}{EI_R}\right)}$$

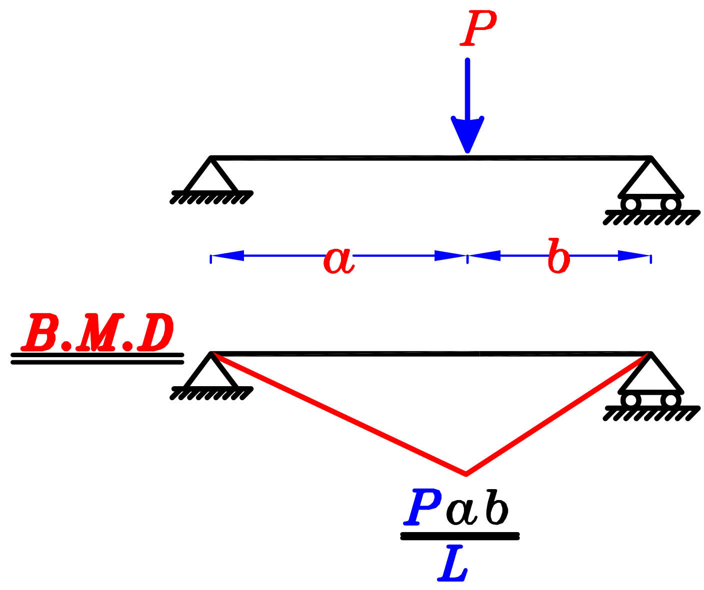
$$\Downarrow$$

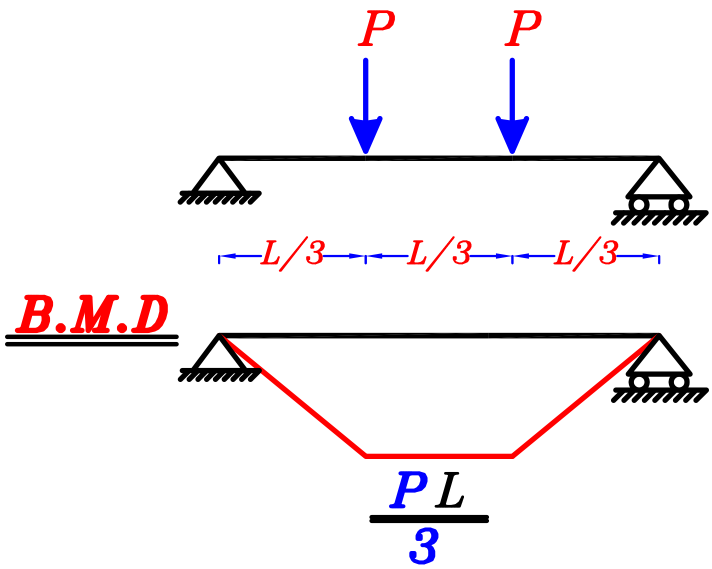
$$\boxed{M_1 \; L_L + 2M_2\left(L_L + L_R \right) + M_3 \; L_R = -6\left(r_L + r_R \right)}$$

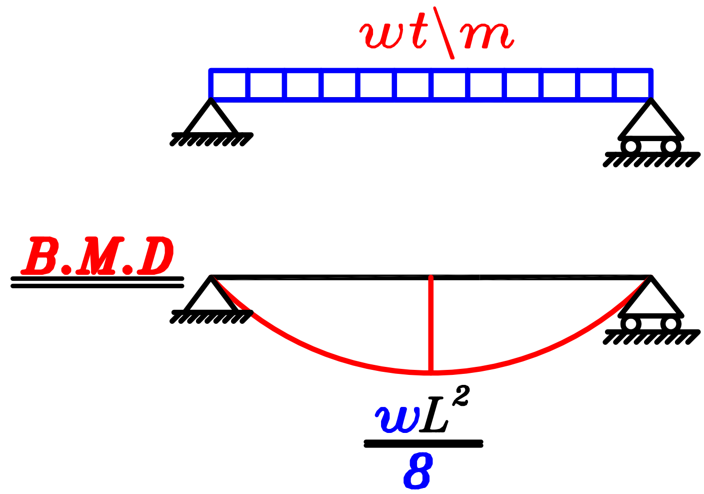
و لاننا سوف نحتاج الى رسم ال B.M.D للكمرات فمن المفضل أن نحفظ بعض أشكال ال B.M.D كما فى الصفحة التالية

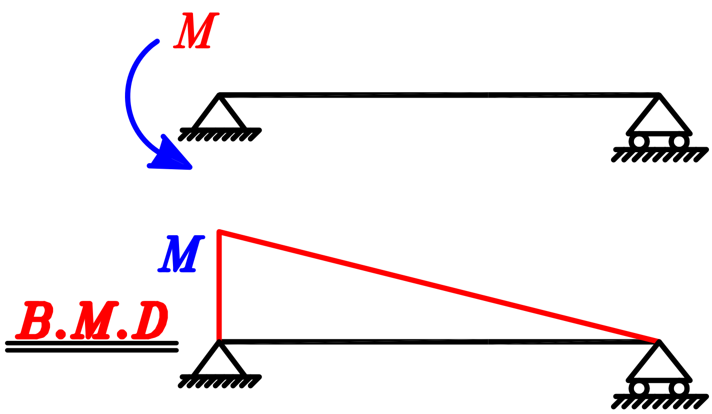
بعض اشكال ال B.M.D الهامة

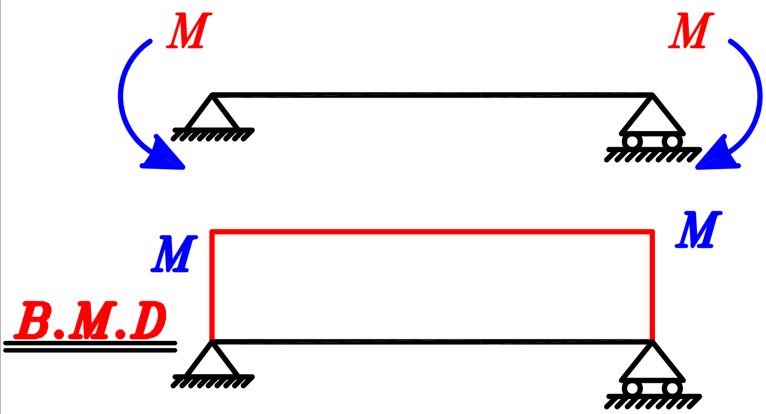








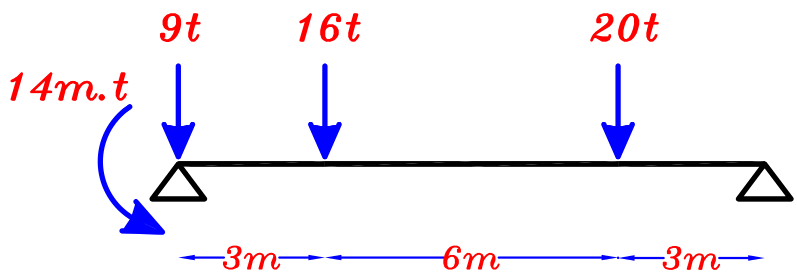


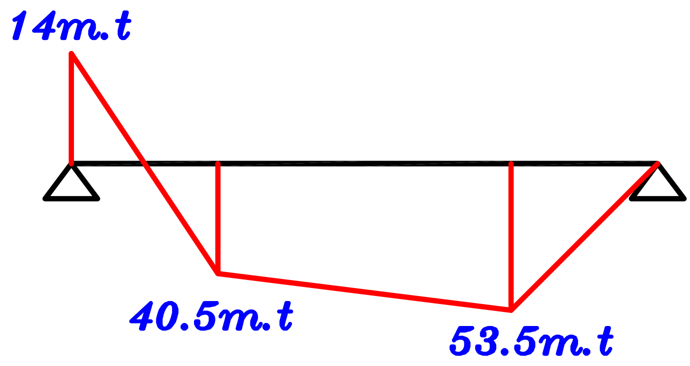


Elastic load

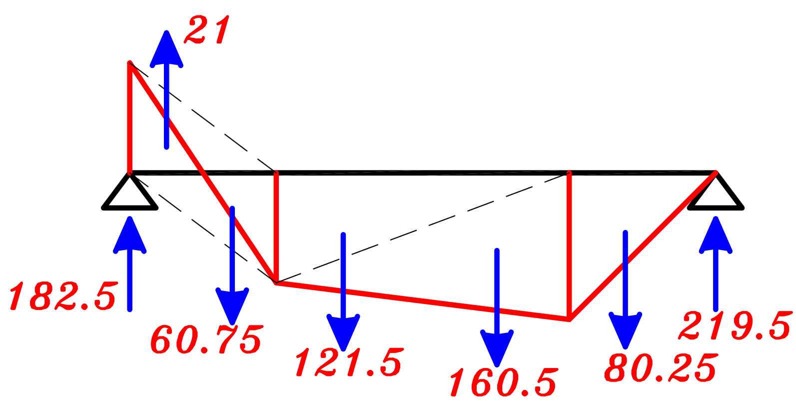
يفضل عند حساب الـ *Elastic load* بدلا من رسم الـ *moment* للـ *member* بكل الـ *Loads* اللى عليه أن نقسم المسألة الى مجموعة من الـ *Loads* المحفوظ لكل منهم قيم الـ *moment* ثم نحسب الـ *Elastic Reaction* لكل منهم و نجمعهم فى النهاية أى كأننا عملنا *Super position*.

Example:



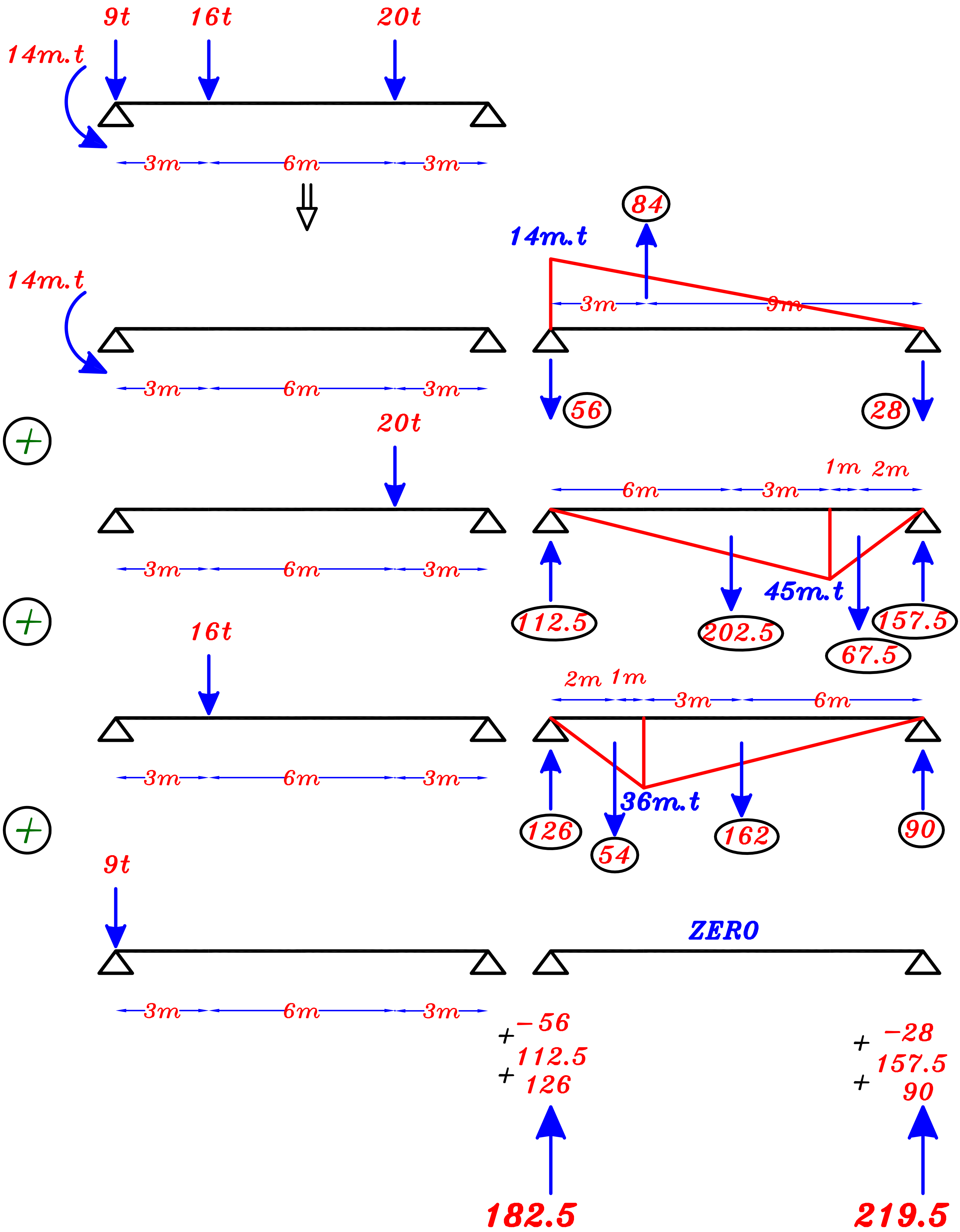


B.M.D



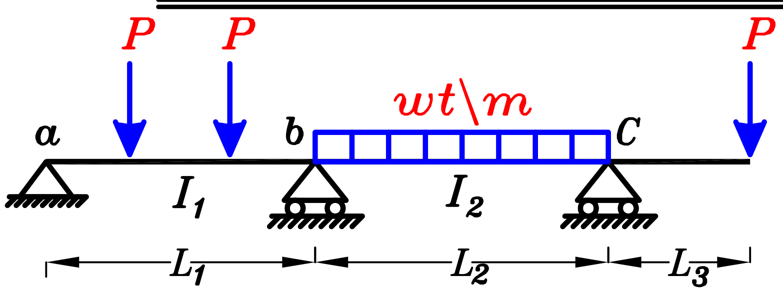
Elastic Loads

و الحل الاخر أن نقوم بعمل الـ *Super position*

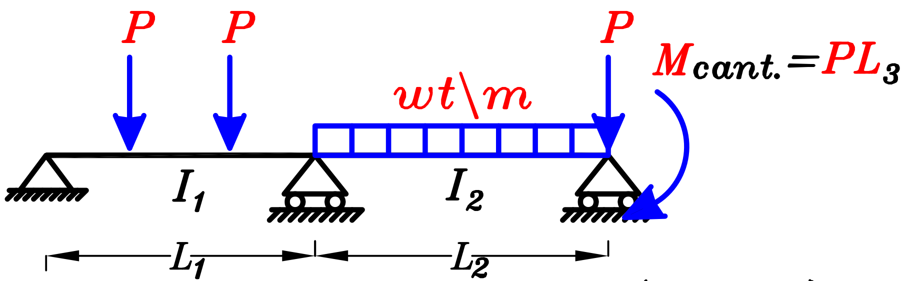

9t
16t
20t
14m.t
3m
6m
3m
14m.t
84
3m
9m
56
28
20t
1m 2m
6m
3m
45m.t
112.5
202.5
67.5
157.5
16t
2m 1m
3m
6m
36m.t
126
54
162
90
9t
ZERO
+ −56
112.5
+ 126
+ −28
157.5
+ 90
182.5
219.5

SPECIAL CASES

① فى حالة وجود Cantliver فى المسألة



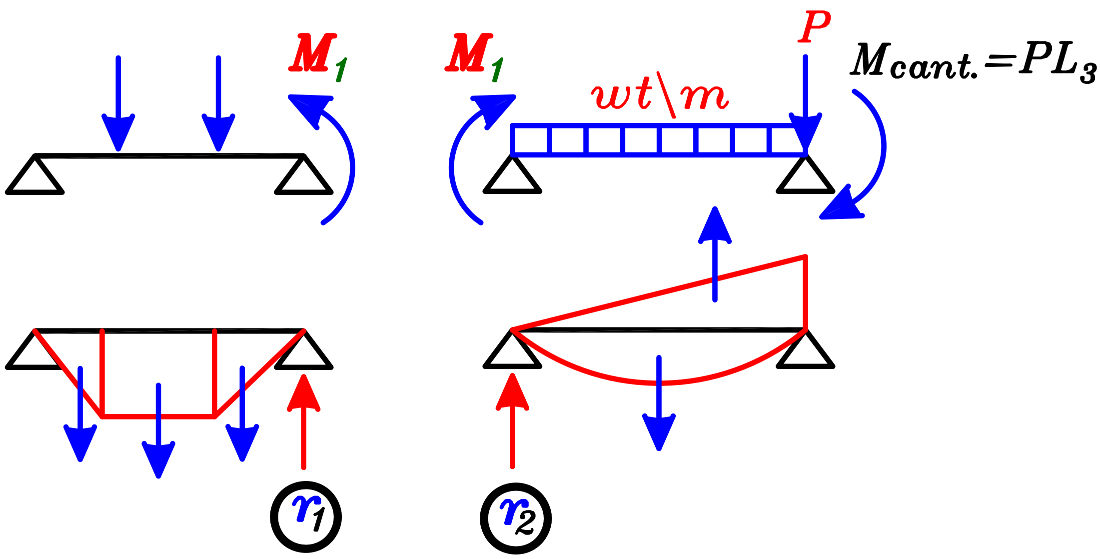
سوف نزيل الـ Cantliver و نعوض عنه بتأثيره و هو Force و Moment



و هنا يوجد حلان و هما

الحل الاول

ندخل $M_{cant.}$ فى حساب الـ Elastic reactions و بالتالى عند التعويض فى معادلة الـ 3-moment equation يكون الـ moment عند نقطة C يساوى صفر و ذلك لاننا أخذنا تأثيرة فى حساب الـ Elastic reactions

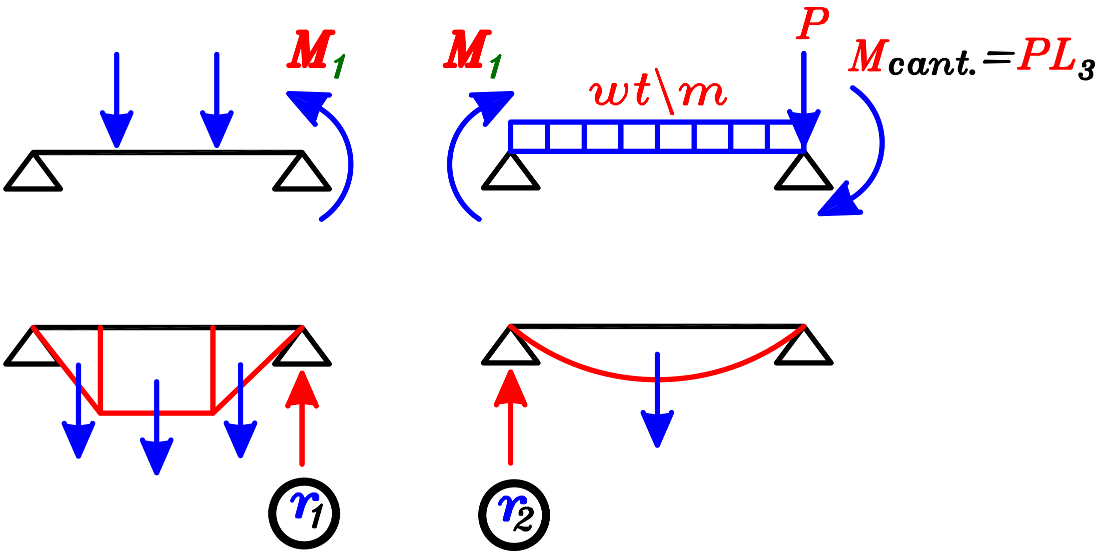


$$\boxed{0 + 2M_1\left(\frac{L_1}{EI_1}+\frac{L_2}{EI_2}\right) + 0 = -6\left(\frac{r_1}{EI_1}+\frac{r_2}{EI_2}\right)}$$

و يفضل الحل بهذه الطريقة

الحل الثانى

ندخل $M_{cant.}$ فى معادلة ال *3–moment equation* و باشارته و بالتالى نحسب ال *Elastic reactions* بدونه .



$$0 + 2M_1\left(\frac{L_1}{EI_1}+\frac{L_2}{EI_2}\right) - M_{cant.} = -6\left(\frac{r_1}{EI_1}+\frac{r_2}{EI_2}\right)$$

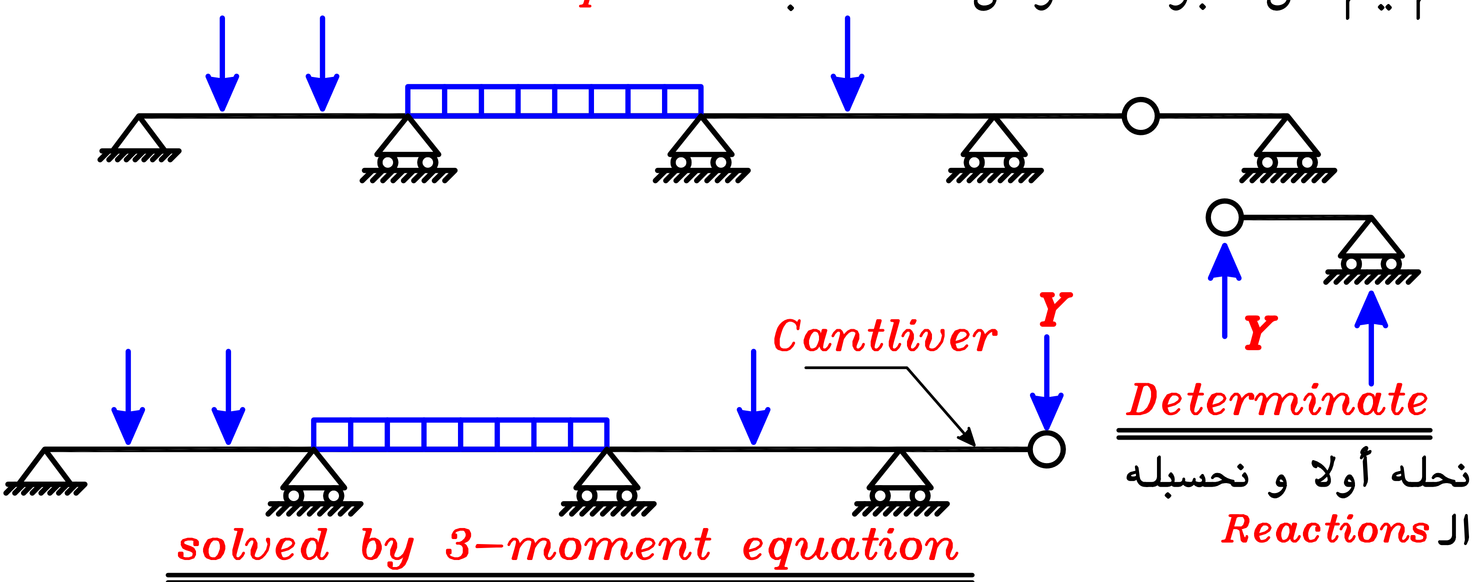
② فى حالة وجود *Intermediate hinge* فى الكمرة

نقسم المسألة الى جزئين عند ال *Intermediate hinge*

⇐ اذا كان احد الجزئين المنفصلين *determinate*

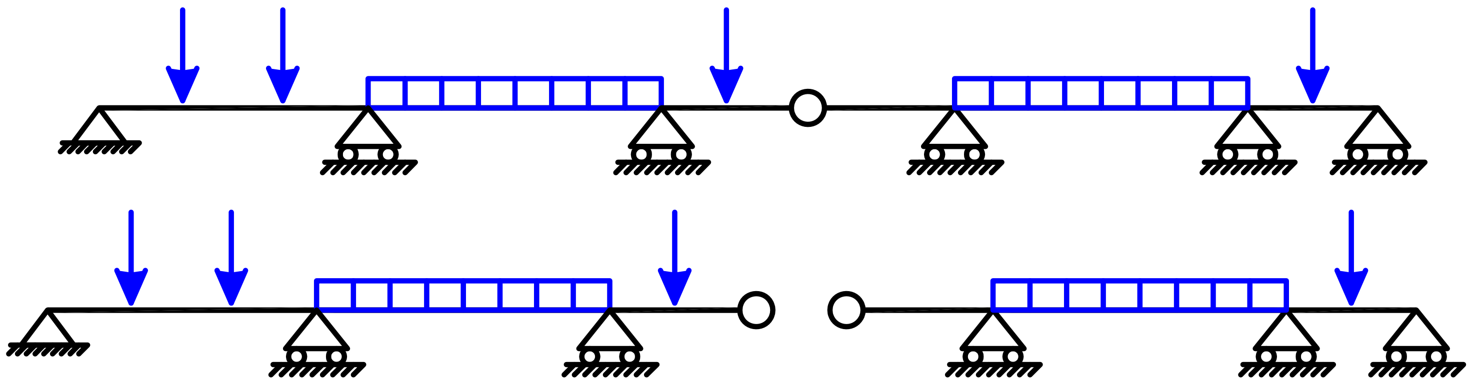
يتم حل الجزء ال *determinate* و عكس ال *Reactions* على الجزء الاخر

ثم يتم حل الجزء الاخر من المسألة بال *3 – moment equation*



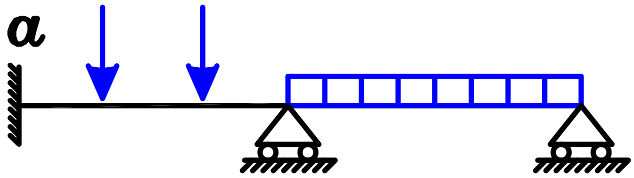
⇐ اذا كان احد الجزئين المنفصلين *Indeterminate*

لا يمكن حلها بال *3 – moment equation*

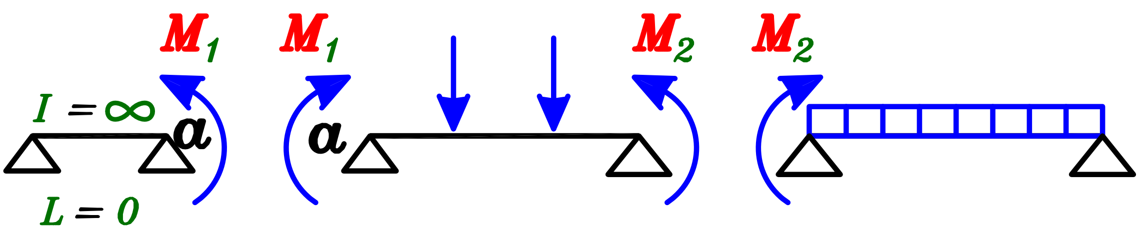


Ineterminate *Ineterminate*

③ فى حالة وجود *Fixed Support*



ال *Fixed Support* هو عبارة عن حائط خرسانة مسلحة و بالتالى تكون أبعاده كبيرة جدا مقارنة بالكمرة و لذلك تكون الكمرة مثبتة فيه تماما أى أنه كما لو كانت الكمرة مثبتة فى *member* له *Stiffness* كبيرة جدا و حيث أن ال $K = \frac{EI}{L}$ فسوف نعوض عن ال *Fixed Support* بـ *member* طوله يساوى صفر و ال I له تساوى ∞ حتى تكون له *Stiffness* كبيرة جدا تكافئ ال *Stiffness* لل *Fixed Support* و ذلك لان معادلة ال *3–moment equation* لا تتعامل الا مع *members* أى أنه كل *Joint* مجهول عندها ال *moment* لابد من وجود *member* قبلها و بعدها .



و بذلك يكون كل *Joint* ال *moment* عندها مجهول تحتوى على *member* قبلها و بعدها .

خطوات الحل

١- نقسم الـ *Structure* من عند الـ *Supports* و نفصل كل *member* على حدا مع الاخذ فى الاعتبار الـ*Special Cases*.

٢- نضع الـ *moments* فى بداية و نهاية كل *member* و دائما نضعها بتحزم الـ*member* و فى اتجاهها الموجب أى ذيل السهم لاسفل.

٣- نحل كل جزء على حدا على أساس أنه *Simple* أى مع اهمال الـ *moments* فى البداية و النهاية و فى حالة الـ*Cantliver* من الممكن أن ندخل *moment* الـ*Cantliver* فى هذه الخطوة و لكن فى هذه الحالة لا ندخله عند تطبيق معادلة الـ *3-Moment equation*.

٤- نحسب الـ *Elastic loads* لكل جزء.

٥- نحسب الـ *Elastic Reactions* يمين و شمال الـ *Joints* المجهول عندها الـ *moments*.

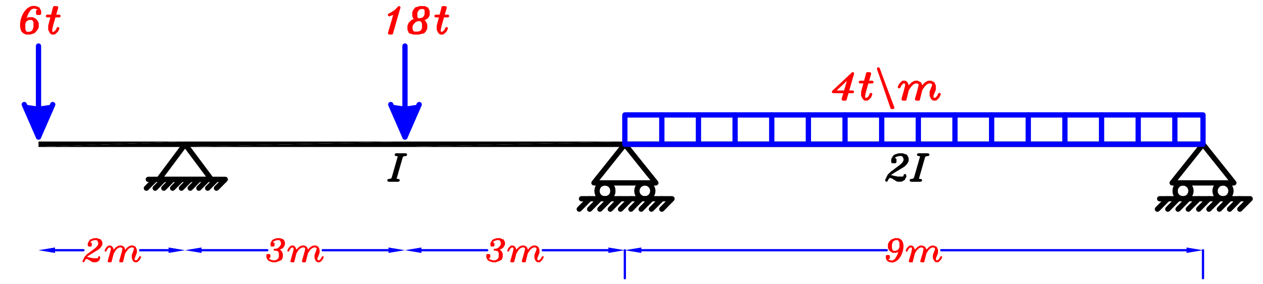
٦- نطبق معادلة الـ *3-Moment equation* عند الـ *Joints* المجهول عندها الـ *moments*.

٧- نحل المعادلات معا و نحصل على الـ *moments* المجهولة.

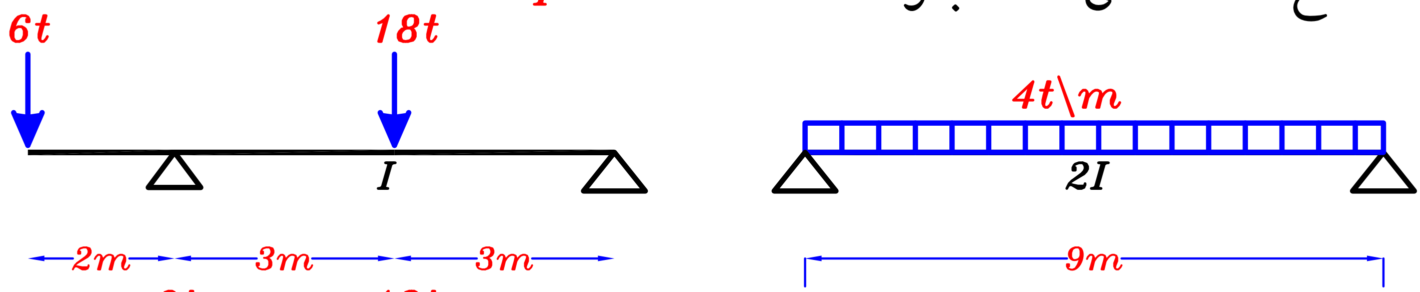
٨- نرسم الـ *B.M.D.*.

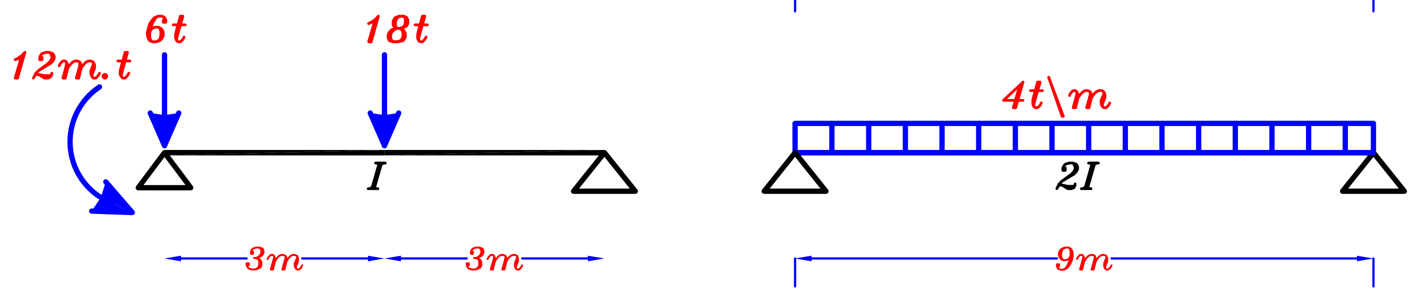
Example:

For the shown beam draw the B.M.D .

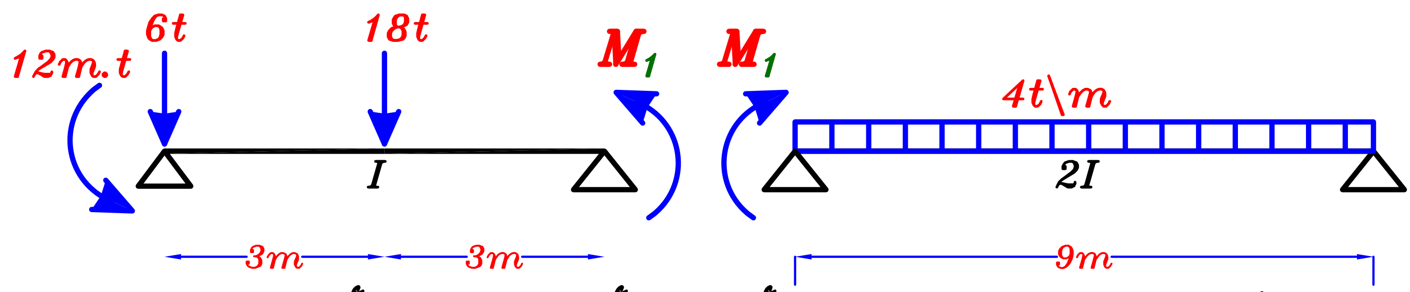


١- نقسم الـ *Structure* من عند الـ *Supports* و نفصل كل *member* على حدا مع الاخذ فى الاعتبار الـ*Special Cases*.

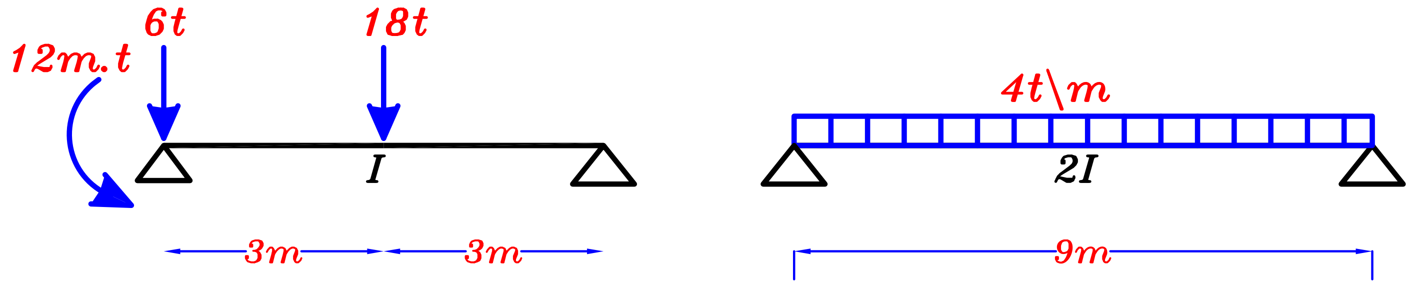


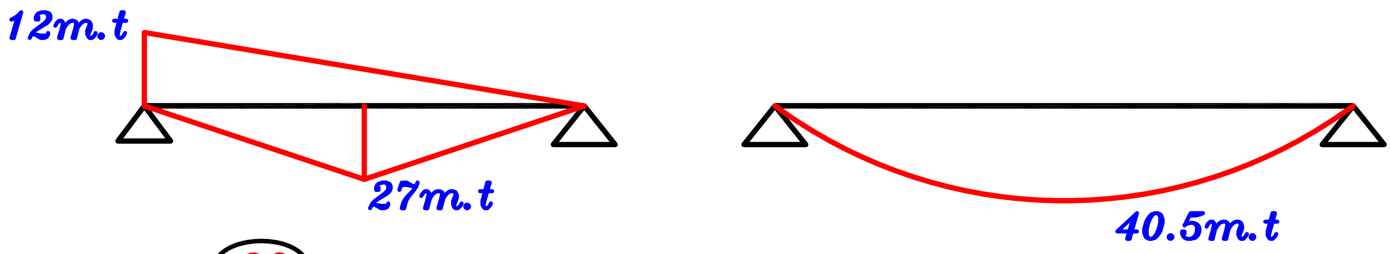


٢- نضع الـ *moments* فى بداية و نهاية كل *member* و دائما نضعها بتحزم الـ*member* و فى اتجاهها الموجب أى ذيل السهم لاسفل.

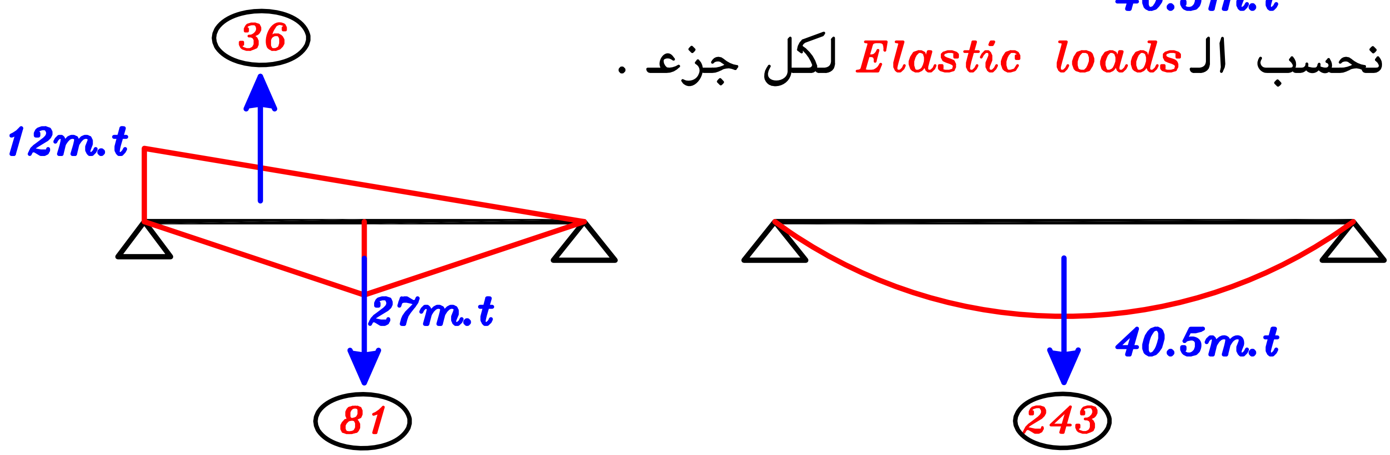


٣- نحل كل جزء على حدا على أساس أنه *Simple* أى مع اهمال الـ *moments* فى البداية و النهاية و فى حالة الـ*Cantliver* من الممكن أن ندخل *moment* الـ*Cantliver* فى هذه الخطوة و لكن فى هذه الحالة لا ندخله عند تطبيق معادلة الـ *3-Moment equation*.

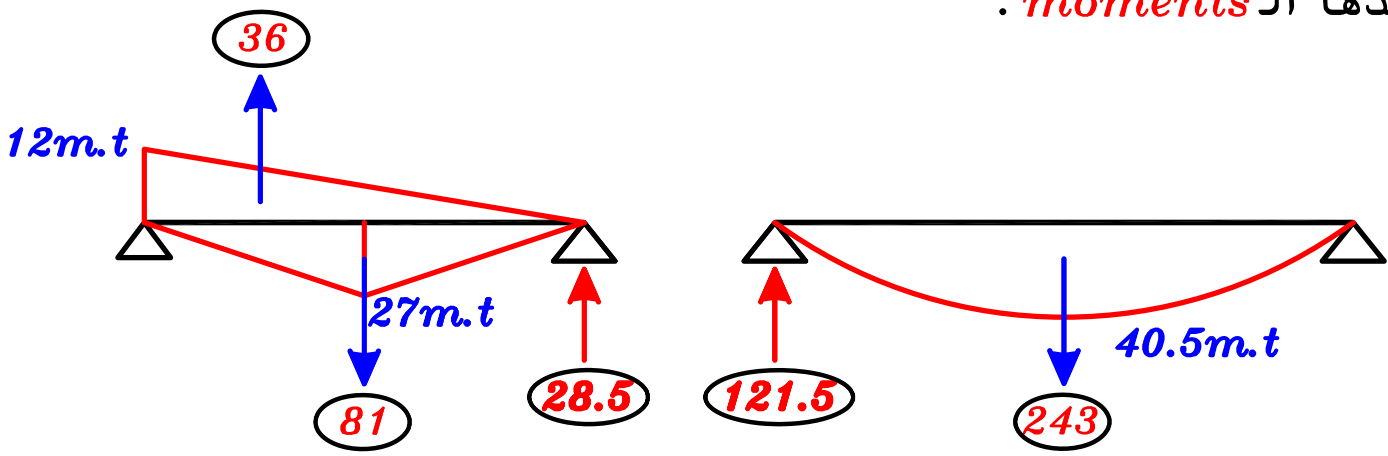




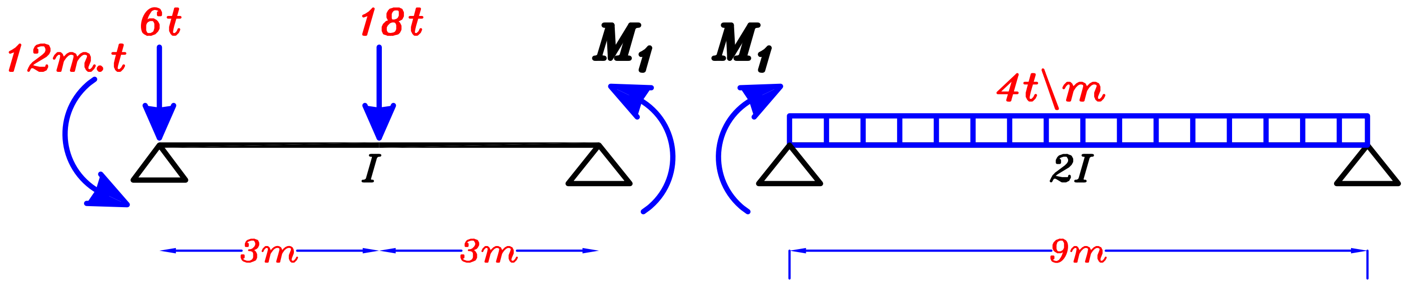
٤- نحسب الـ *Elastic loads* لكل جزء .



٥- نحسب الـ *Elastic Reactions* يمين و شمال الـ *Joints* المجهول عندها الـ *moments* .



٦- نطبق معادلة الـ *3-Moment equation* عند الـ *Joints* المجهول عندها الـ *moments* .



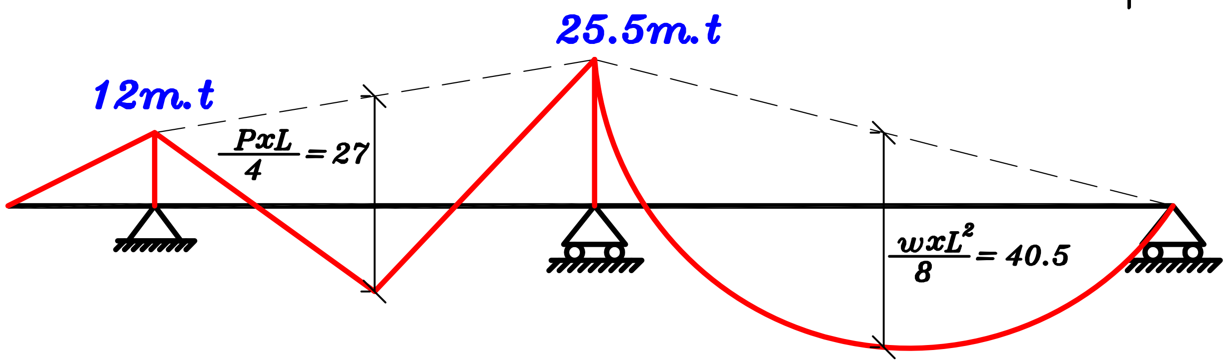
$$0+2M_1\left(\frac{6}{EI}+\frac{9}{2EI}\right)+0=-6\left(\frac{28.5}{EI}+\frac{121.5}{2EI}\right)$$

$$0+2M_1\left(\frac{6}{1}+\frac{9}{2}\right)+0=-6\left(\frac{28.5}{1}+\frac{121.5}{2}\right)$$

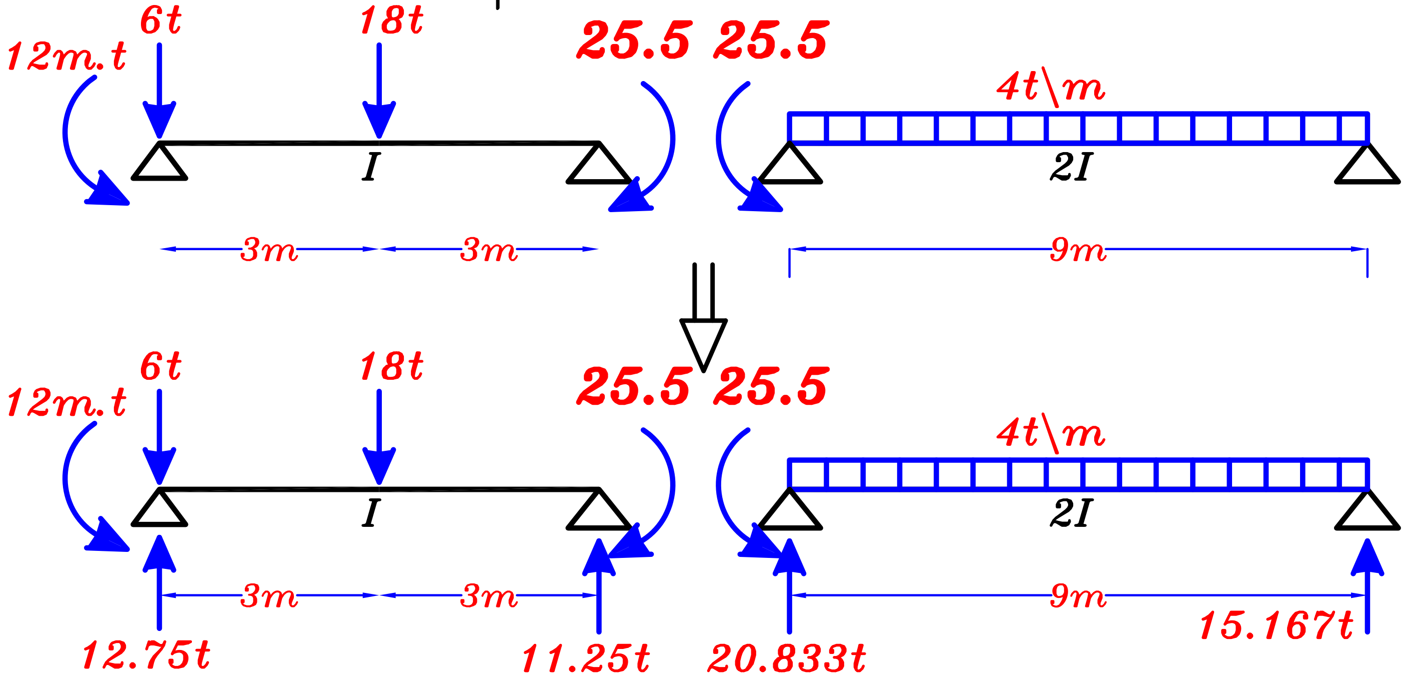
٧- نحل المعادلات معا و نحصل على الـ moments المجهولة.

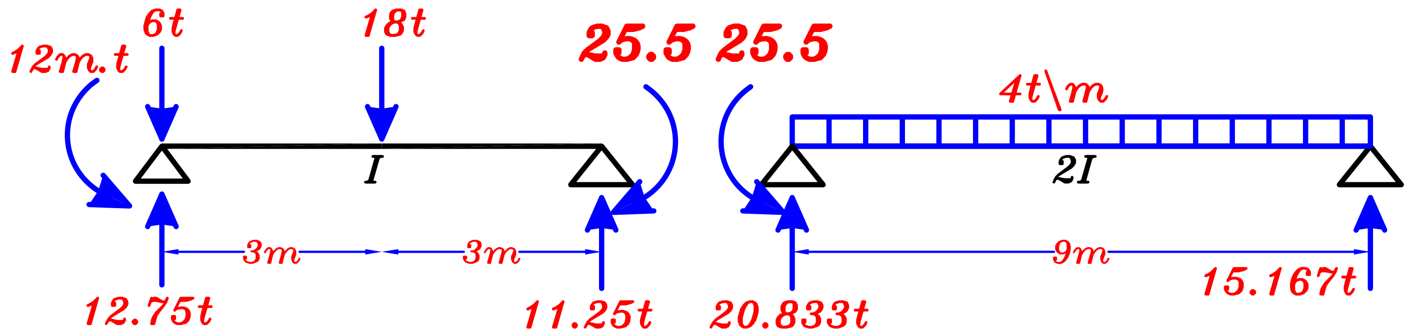
$$\boxed{M_1=-25.5m.t}$$

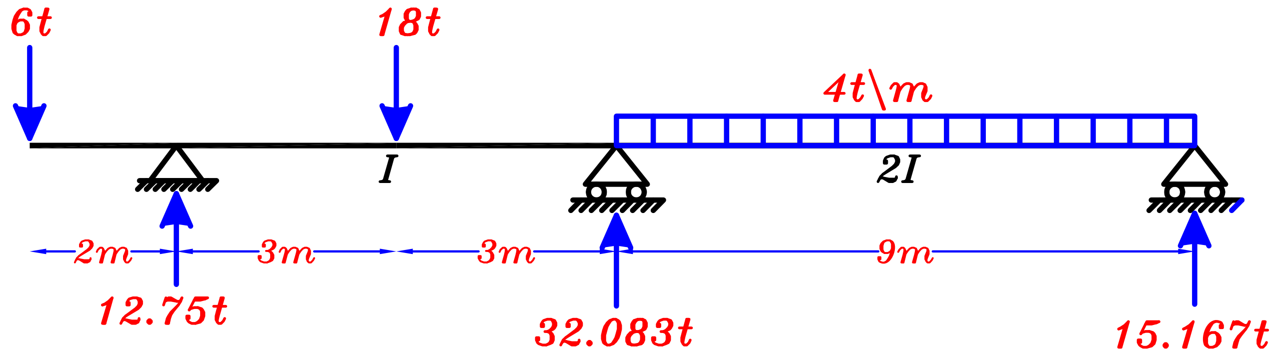
٨- نرسم الـ B.M.D.

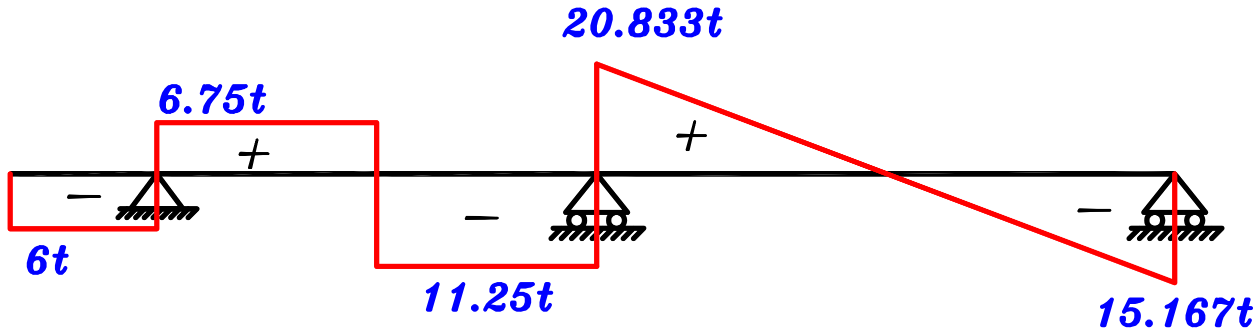


و لو طلب مننا الـ S.F.D بمعرفة الـ moment فى بداية و نهاية كل member يمكننا حساب الـ Reactions و رسم الـ S.F.D.




12m.t
6t
18t
25.5 25.5
4t\m
I
2I
3m
3m
9m
12.75t
11.25t
20.833t
15.167t

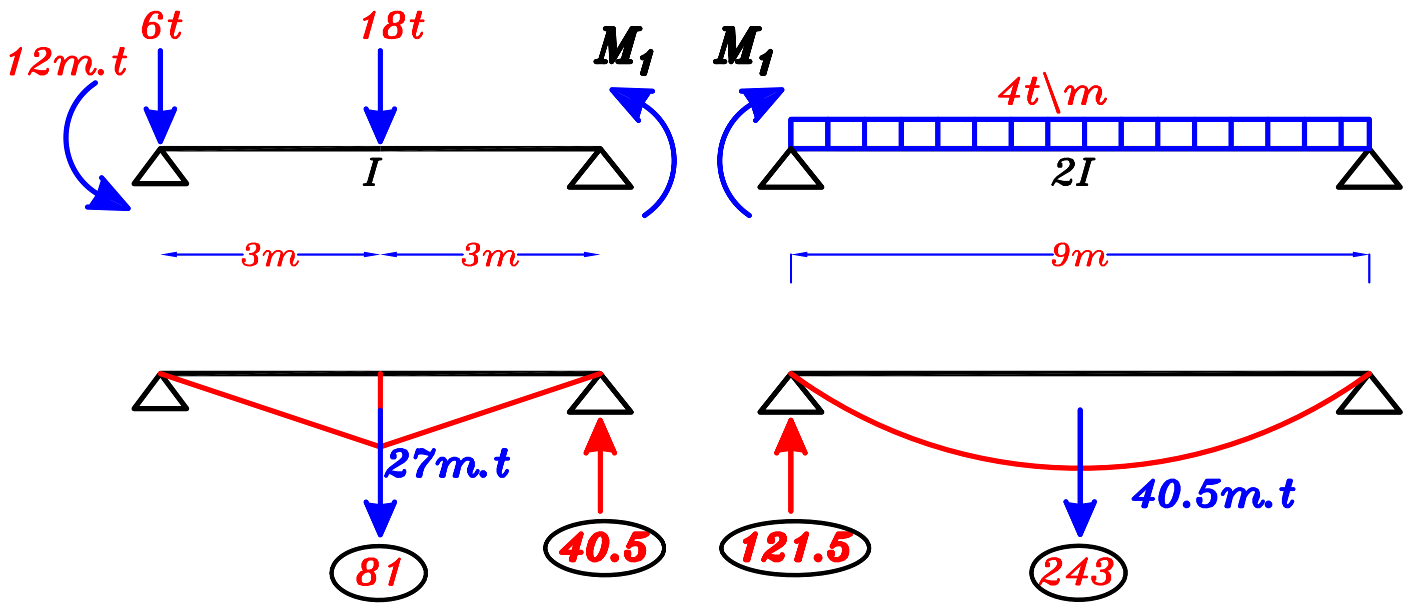

6t
18t
4t\m
I
2I
2m
3m
3m
9m
12.75t
32.083t
15.167t


20.833t
6.75t
6t
11.25t
15.167t

S.F.D

حل أخر

ندخل $M_{cant.}$ فى معادلة ال *3-moment equation* و باشارته و بالتالى نحسب ال *Elastic reactions* بدونه .



$$-12\frac{6}{EI}+2M_1\left(\frac{6}{EI}+\frac{9}{2EI}\right)+0=-6\left(\frac{40.5}{EI}+\frac{121.5}{2EI}\right)$$

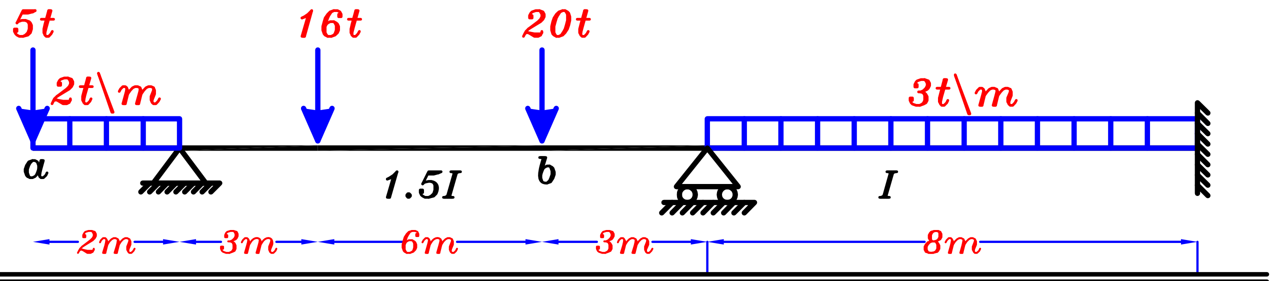
$$-12\frac{6}{1}+2M_1\left(\frac{6}{1}+\frac{9}{2}\right)+0=-6\left(\frac{40.5}{1}+\frac{121.5}{2}\right)$$

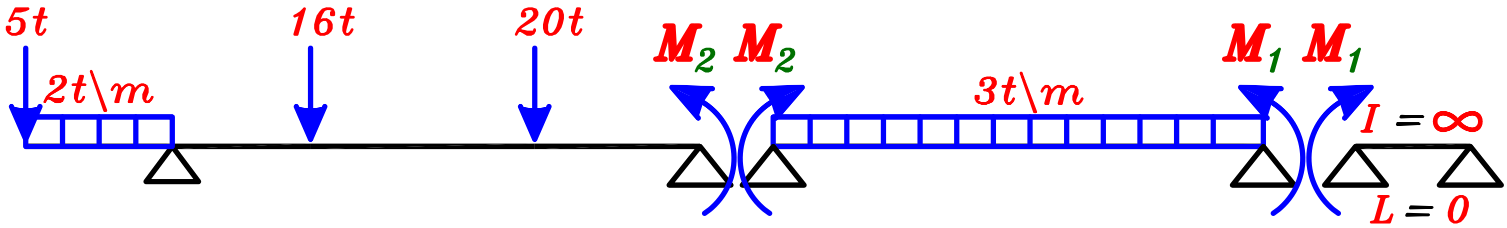
$$\boxed{M_1=-25.5m.t}$$

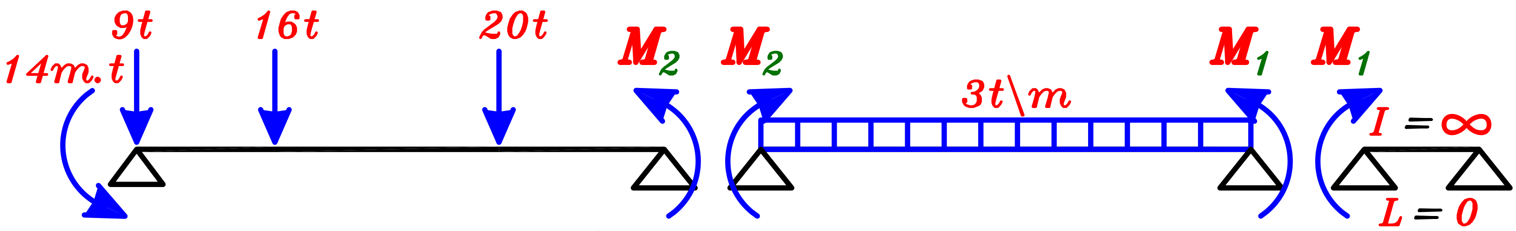
ثم نكمل المسألة

Example:

Draw the B.M.D. and S.F.D. for the shown beam . and the deflection at point a , b .

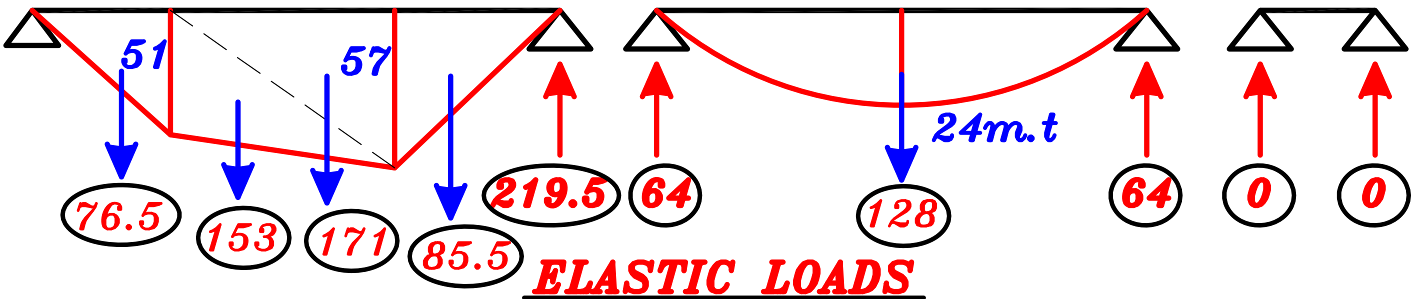






لم نأخذ $M_{Cant.}$ فى حساب ال Elastic loads

و بالتالى سنأخذها فى معادلة ال 3-moment



ELASTIC LOADS

$$-14\frac{12}{1.5}+2M_2\left(\frac{12}{1.5}+\frac{8}{1}\right)+M_1\frac{8}{1}=-6\left(\frac{247.5}{1.5}+\frac{64}{1}\right)$$

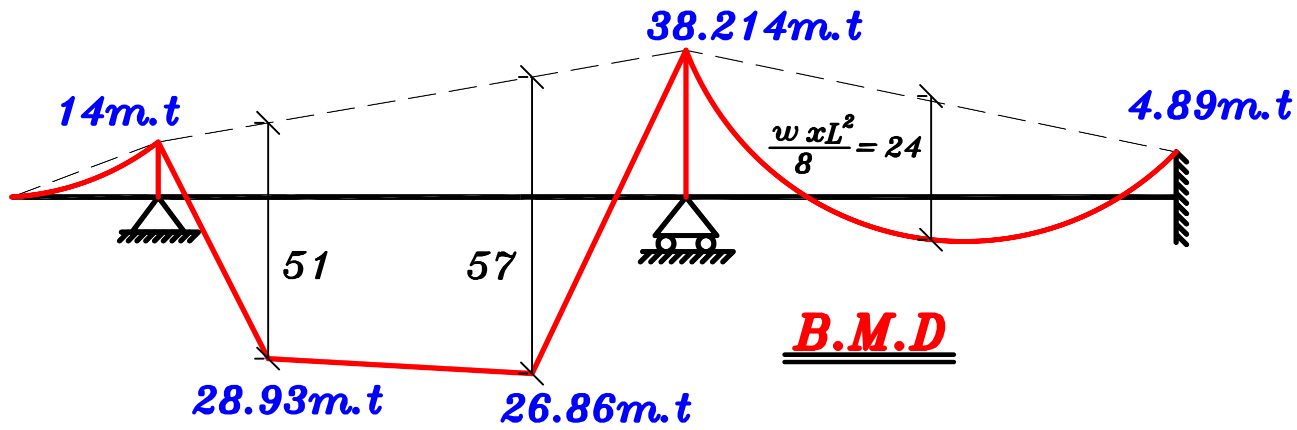
$$3M_2+8M_1=-1262 \Rightarrow EQ.(1)$$

$$M_2\frac{8}{1}+2M_1\left(\frac{8}{1}+0\right)+0=-6\left(\frac{64}{1}+0\right)$$

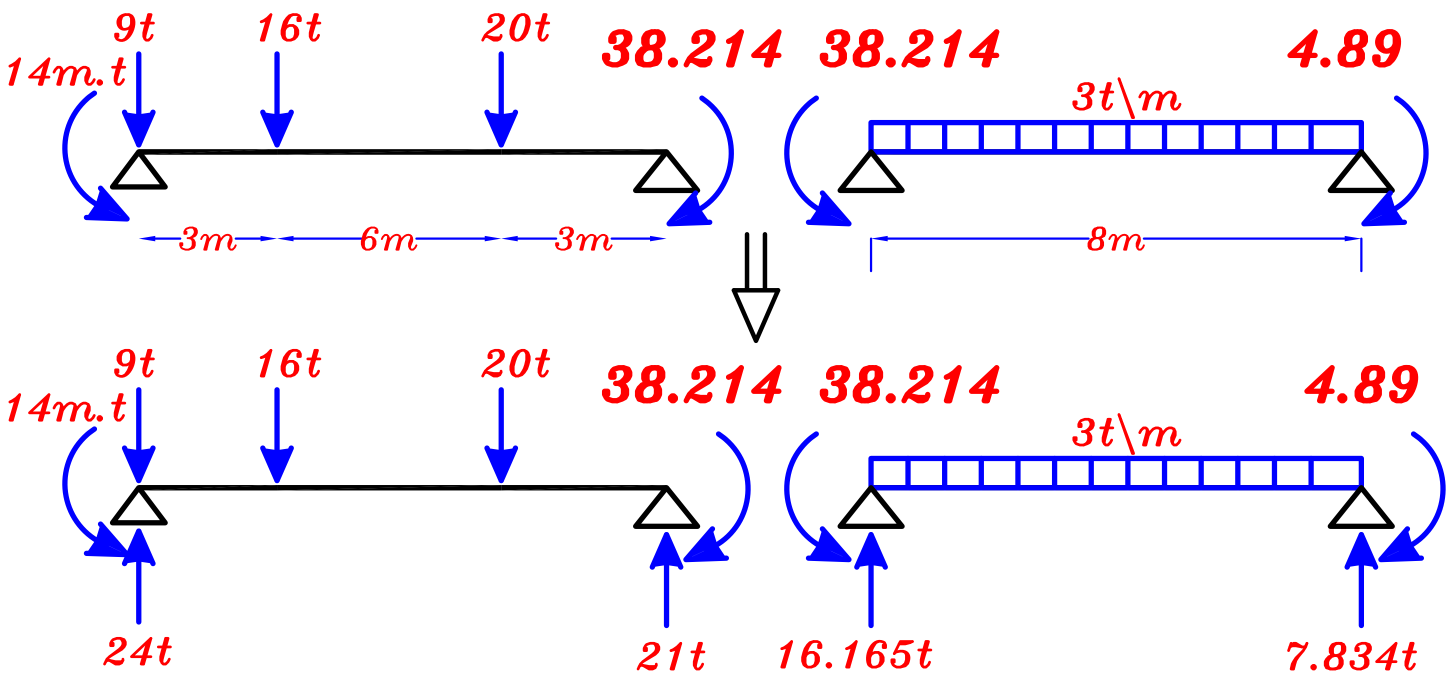
$$8M_2+16M_1=-384 \Rightarrow EQ.(2)$$

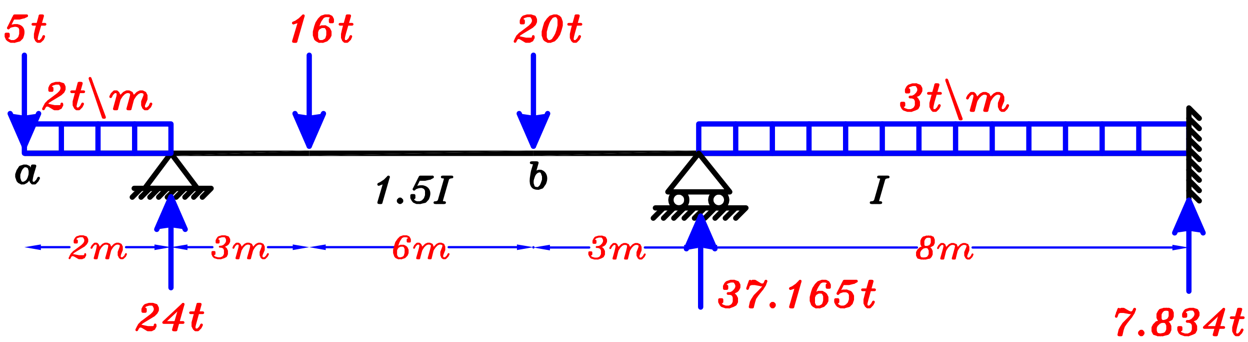
Solving the two equations:

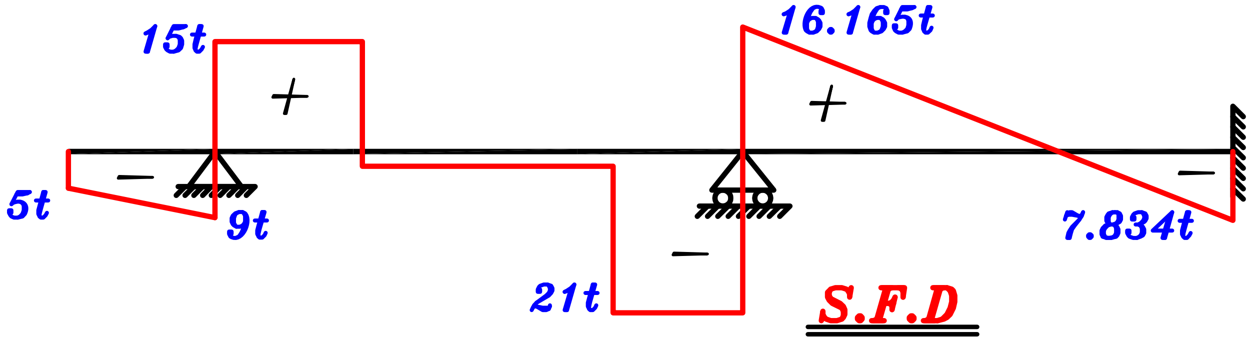
$$\boxed{M_1=-4.893m.t}\qquad\boxed{M_2=-38.214m.t}$$



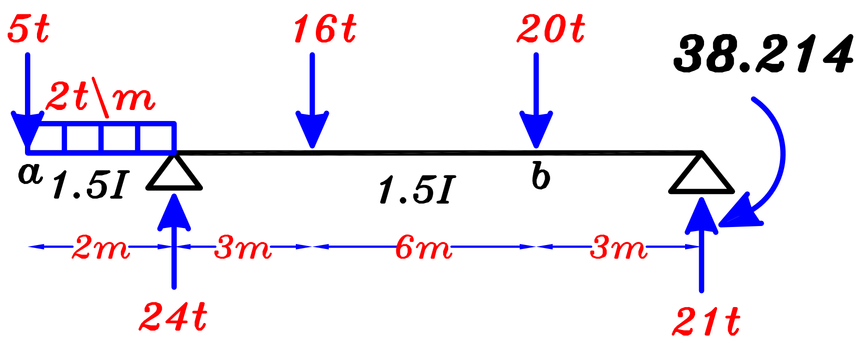
بمعرفة ال *moment* فى بداية و نهاية كل *member* يمكننا حساب ال *Reactions* و رسم ال *S.F.D*.



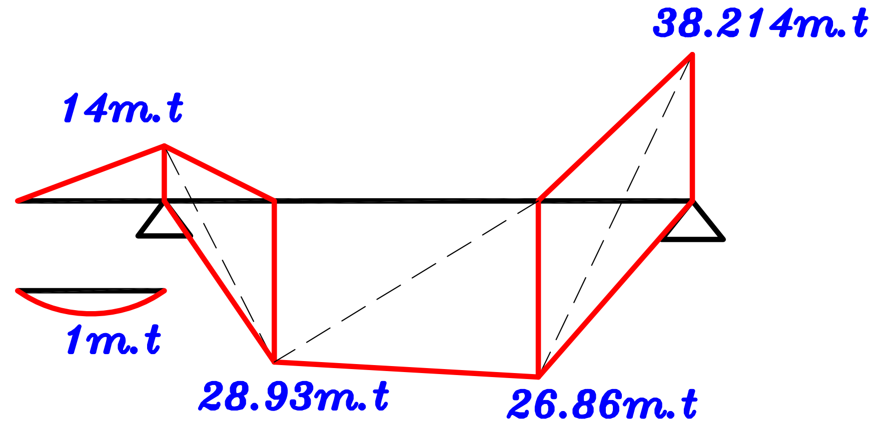




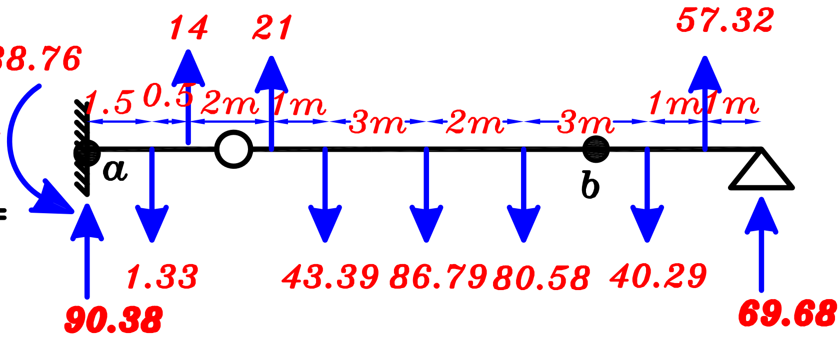
لحساب ال *Deflection* عند نقطة (*a & b*) نحل ال *member* الذى تقع بداخله النقط المراد حساب ال *Deflection* عندها و حلها بطريقة ال *Conjugate beam* .



B.M.D



Conjugate Beam

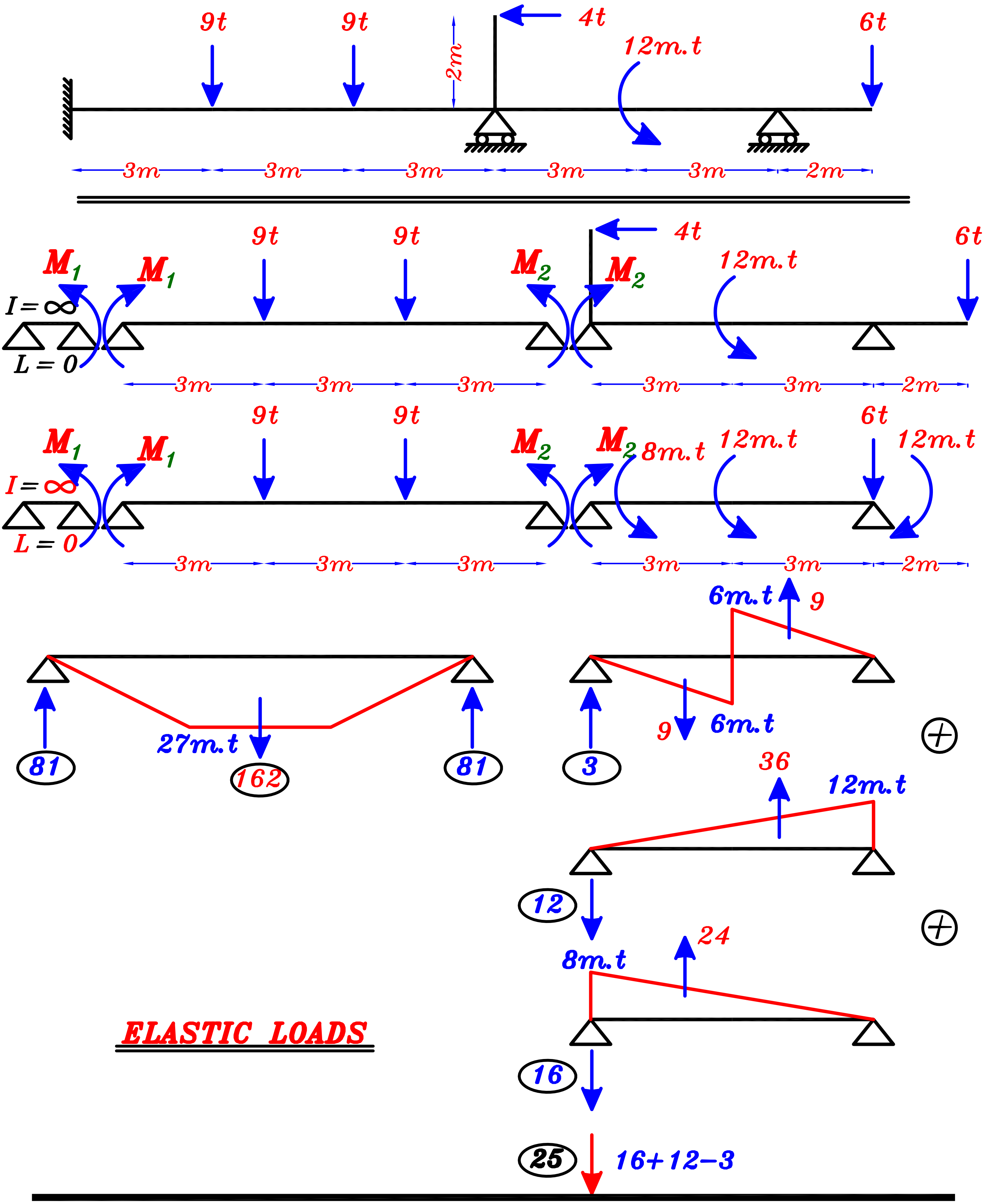


$$Ya = (-188.76 \,/\, 1.5EI) = (-125.84 \,/\, EI)\ m$$

$$Yb = (283.395 \,/\, 1.5EI) = (188.93 \,/\, EI)\ m$$

Example

For the shown beam draw the B.M.D .



$$0+2M_1\left(0+\frac{9}{1}\right)+M_2\frac{9}{1}=-6\left(0+\frac{81}{1}\right)$$

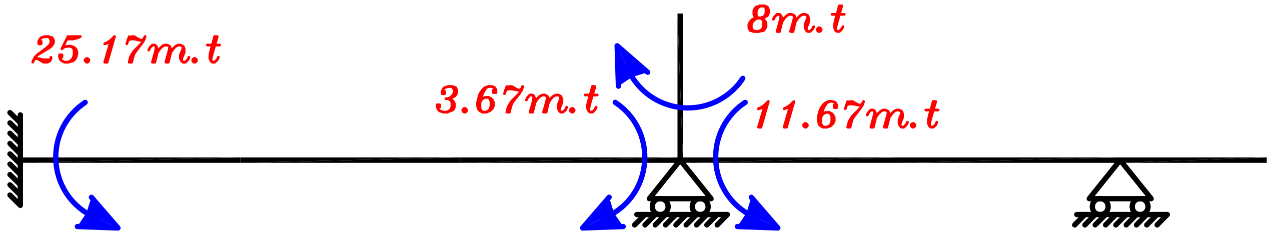
$$18M_1+9M_2=-486 \quad \Rightarrow EQ.(1)$$

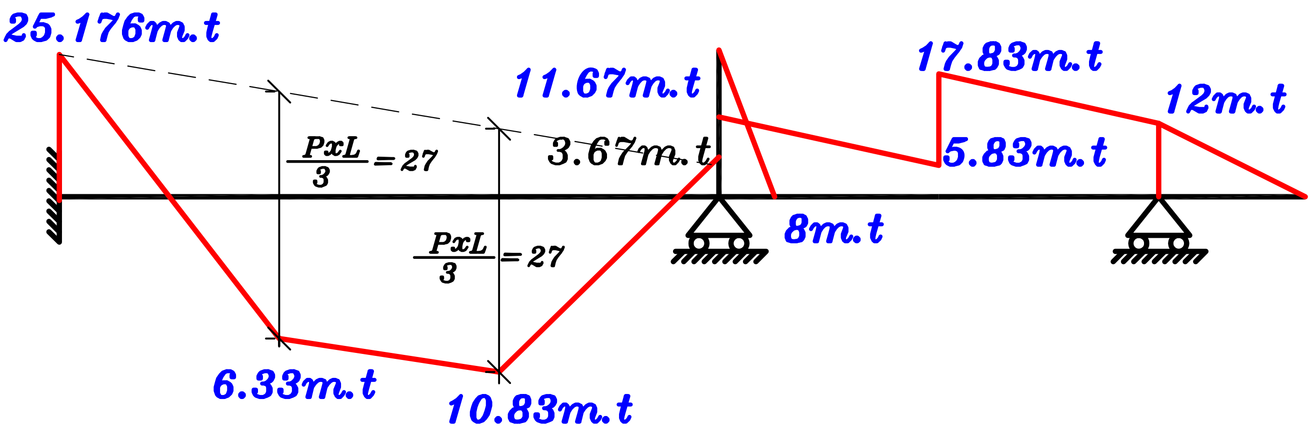
$$M_1\frac{9}{1}+2M_2\left(\frac{9}{1}+\frac{6}{1}\right)+0=-6\left(\frac{81}{1}-\frac{25}{1}\right)$$

$$9M_1+30M_2=-336 \quad \Rightarrow EQ.(2)$$

Solving the two equations:

$$\boxed{M_1=-25.17m.t} \qquad \boxed{M_2=-3.67m.t}$$

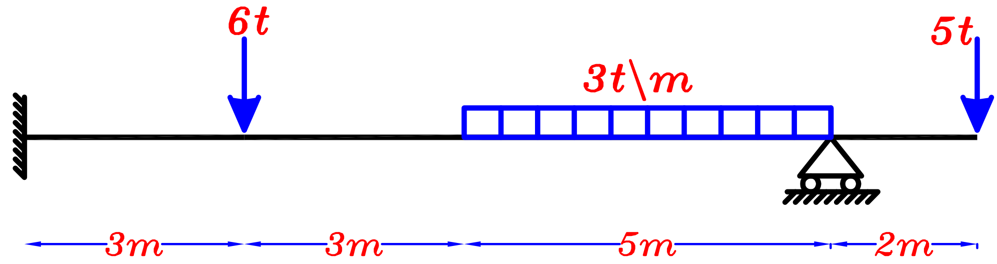


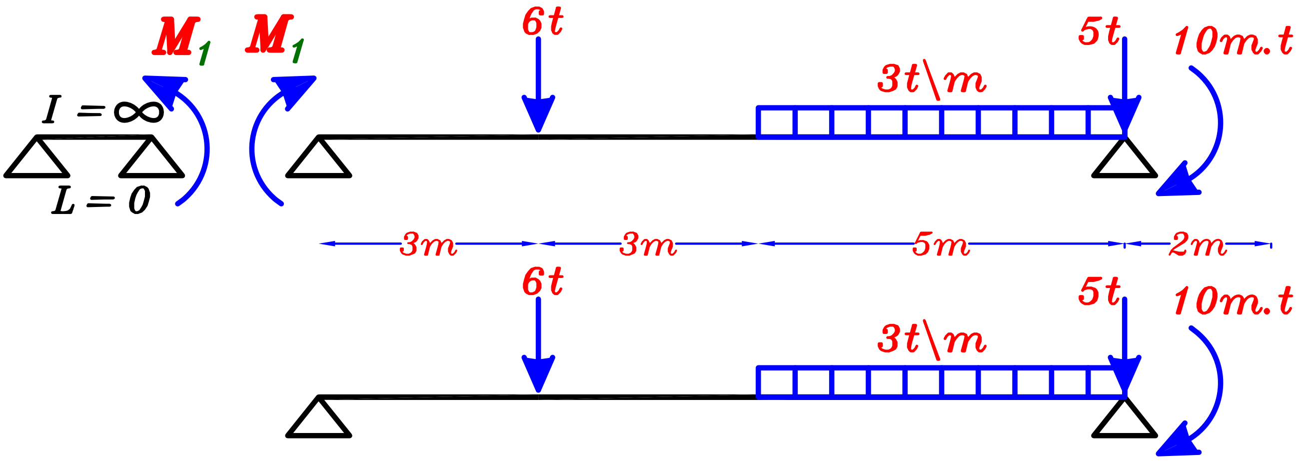


B.M.D

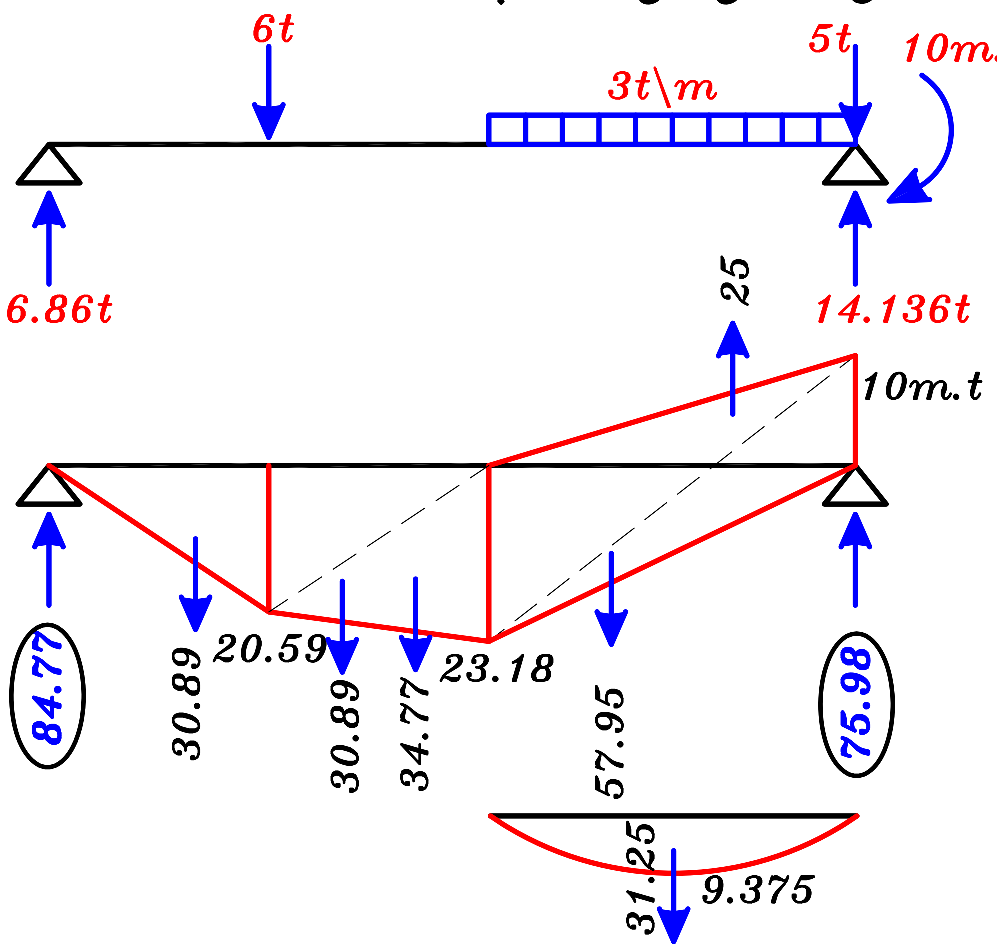
Example

For the shown beam draw the B.M.D & S.F.D .



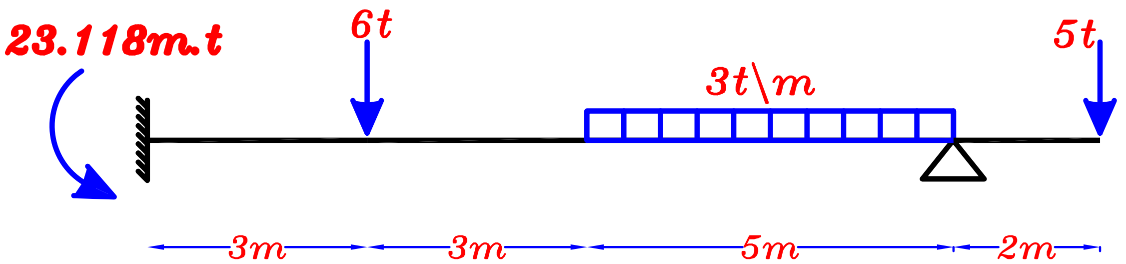


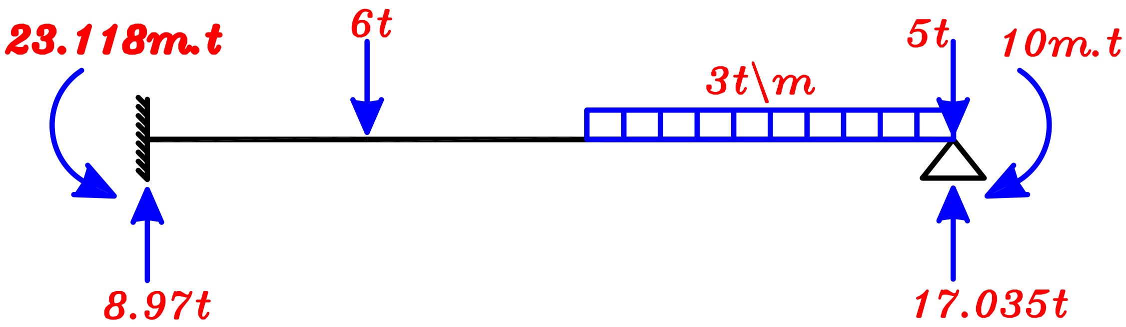
هذا ال *moment* غير محفوظ و بالتالى نحتاج الى حساب ال *Reaxtions*
لرسمه حتى نتمكن من حساب ال *Elastic reactions*

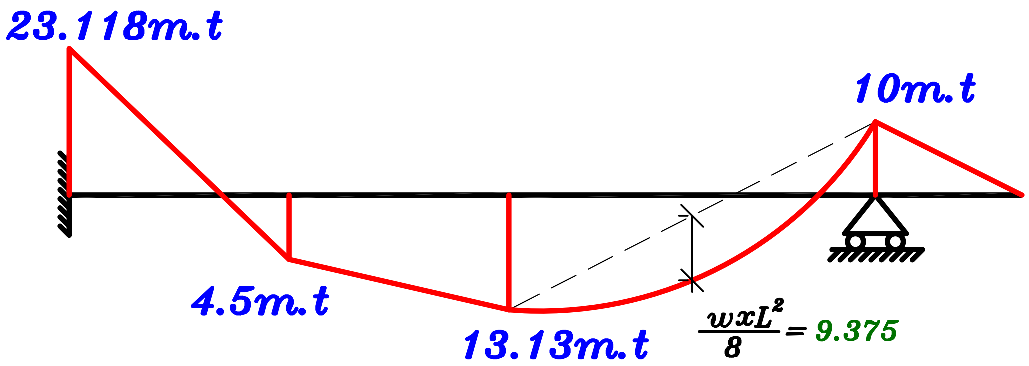


$$0 + 2M_1\left(0+\frac{11}{1}\right) + M_2\frac{11}{1} = -6\left(0+\frac{84.77}{1}\right)$$

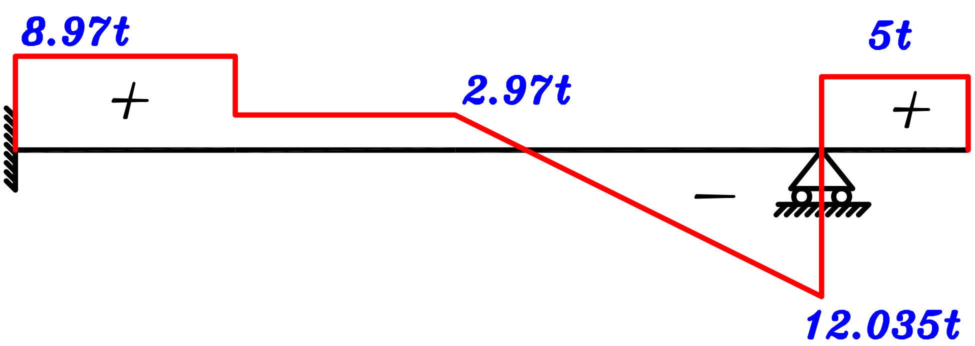
$$\boxed{M_1 = -23.118\,m.t}$$







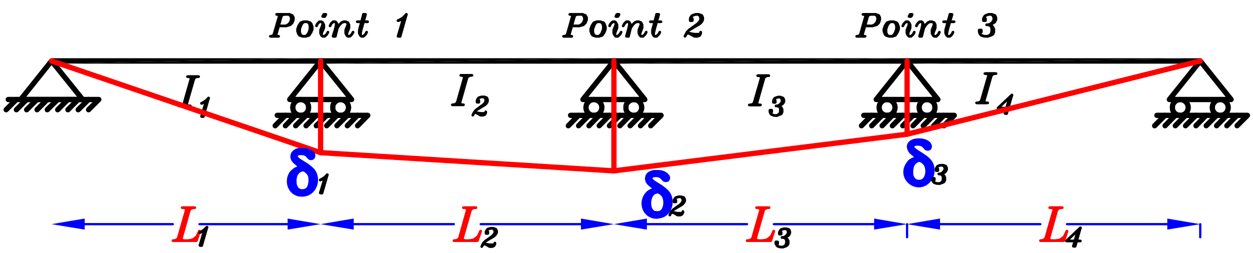
B.M.D

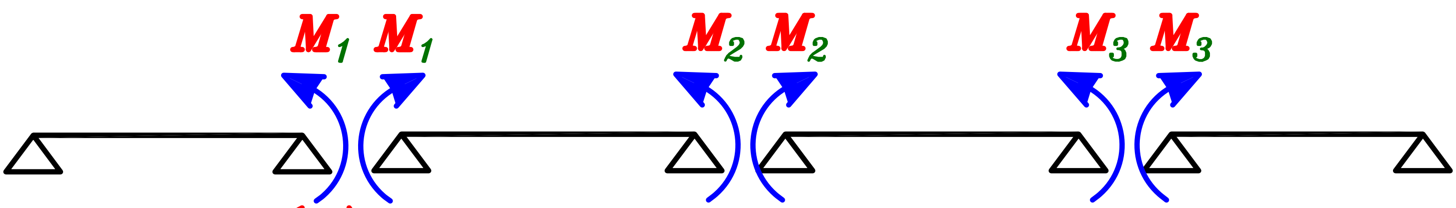


S.F.D

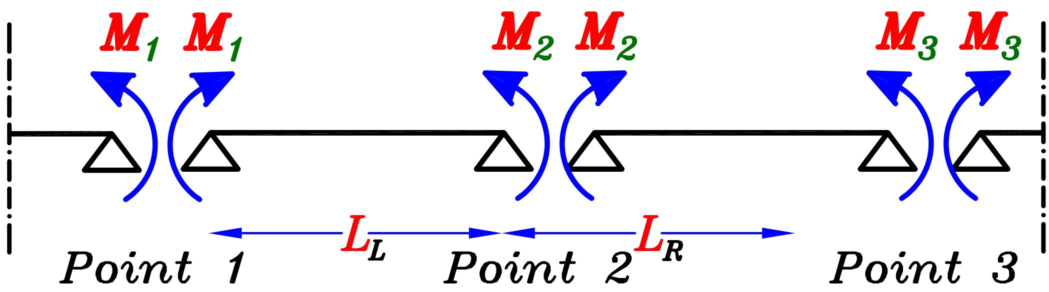
SETTLEMENT

فى حالة و جود *Settlement* أو *Sway* تتغير شكل المعادلة لحساب ال*moments* الناتجة من ال *Settlement*.





At Point (2) :



$$\boxed{M_1\frac{L_L}{EI_L}+2M_2\left(\frac{L_L}{EI_L}+\frac{L_R}{EI_R}\right)+M_3\frac{L_R}{EI_R}=6\left(\frac{\delta_2-\delta_1}{L_L}+\frac{\delta_2-\delta_3}{L_R}\right)}$$

Where

$\delta_1 \Rightarrow$ *Displacement at point (1)*

$\delta_2 \Rightarrow$ *Displacement at point (2)*

$\delta_3 \Rightarrow$ *Displacement at point (3)*

$\delta \Rightarrow +Ve \Rightarrow$ اذا كانت ال*Displacement* لاسفل

$\delta \Rightarrow -Ve \Rightarrow$ اذا كانت ال*Displacement* لاعلى

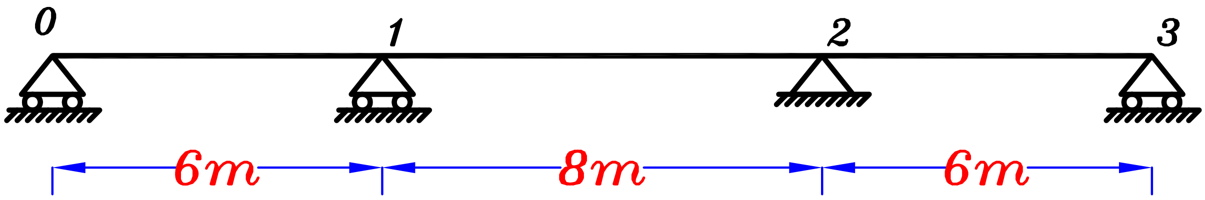
خد بالك

ال*moments* الناتجة من هذه المعادلة نتيجة تأثير ال *Settlement* فقط فاذا كانت المسألة بها *Settlement* و بها *Loads* نقسمها الى جزئين الاول به ال *Loads* و الثانى ال *Settlement* و نوجد ال*moments* لكل مسألة على حدا ثم نجمعهما معا فتكون هذه هى ال *Final moments*

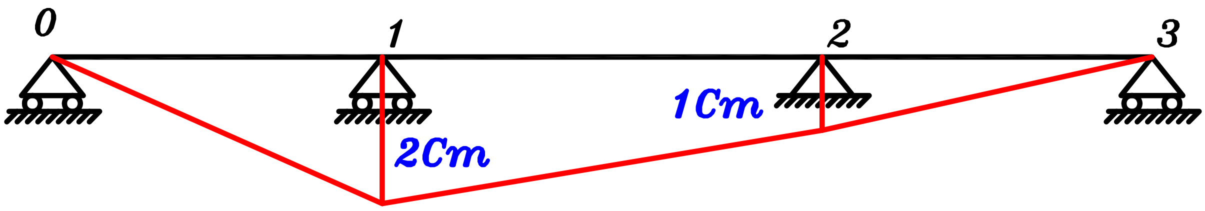
Example

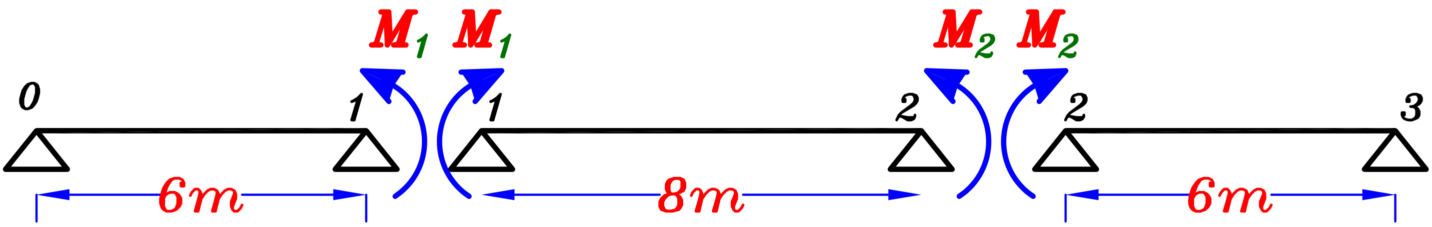
For the shown beam draw the B.M.D&S.F.D, if support 1 settles by 2cm and the support 2 by 1 cm

$(E = 2000 \ t / cm^2 , \ I = 24000 \ cm^4)$



$EI = 2000x2400 = 48{,}000{,}000 \ t.Cm^2 = 4800 \ t.m^2$





At Point (1) :

$$0 + 2M_1\left(\frac{6}{EI} + \frac{8}{EI}\right) + M_2\frac{8}{EI} = 6\left(\frac{\overset{Cm}{2-0}}{\underset{Cm}{600}} + \frac{\overset{Cm}{2-1}}{\underset{Cm}{800}}\right)$$

$7M_1 + 2M_2 = 33 \quad \Rightarrow EQ.(1)$

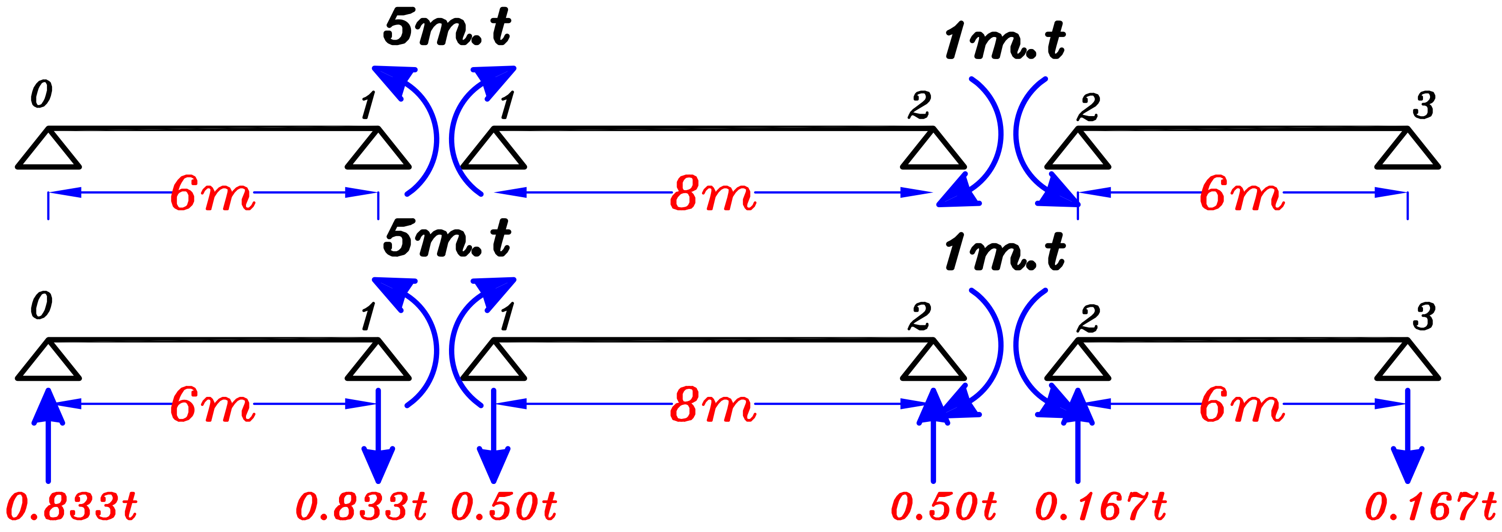
At Point (2) :

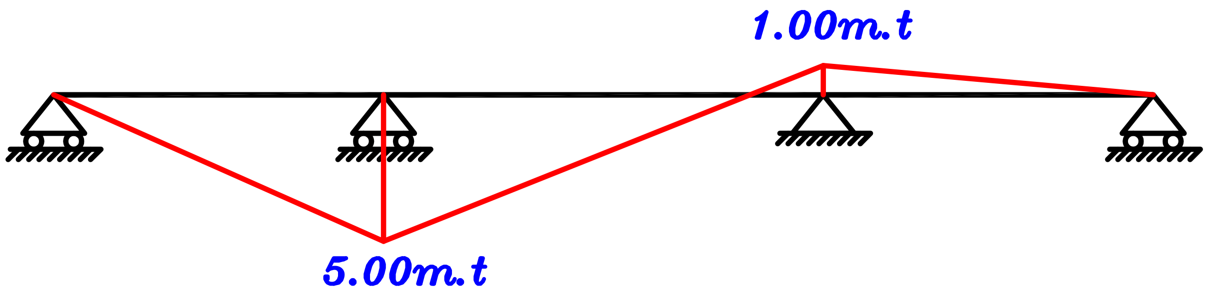
$$M_1\frac{8}{EI} + 2M_1\left(\frac{8}{EI} + \frac{6}{EI}\right) + 0 = 6\left(\frac{\overset{Cm}{1-2}}{\underset{Cm}{800}} + \frac{\overset{Cm}{1-0}}{\underset{Cm}{600}}\right)$$

$2M_1 + 7M_2 = 3 \quad \Rightarrow EQ.(2)$

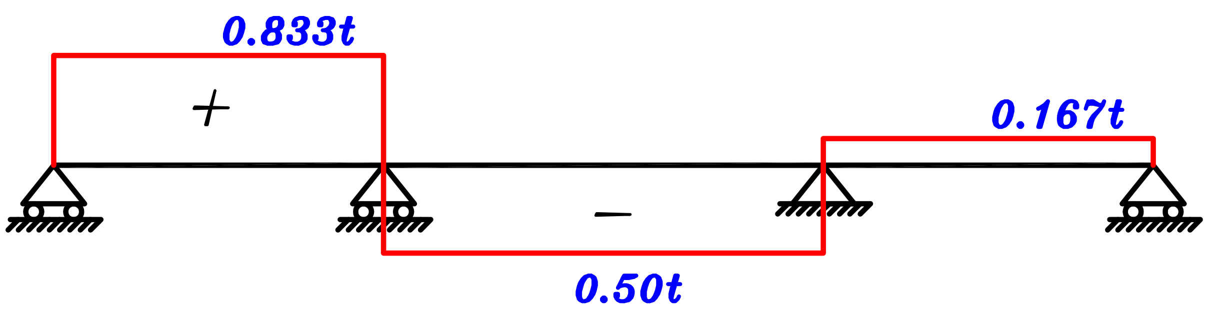
Solving the two equations:

$\boxed{M_1 = 5m.t}$ $\boxed{M_2 = -1m.t}$





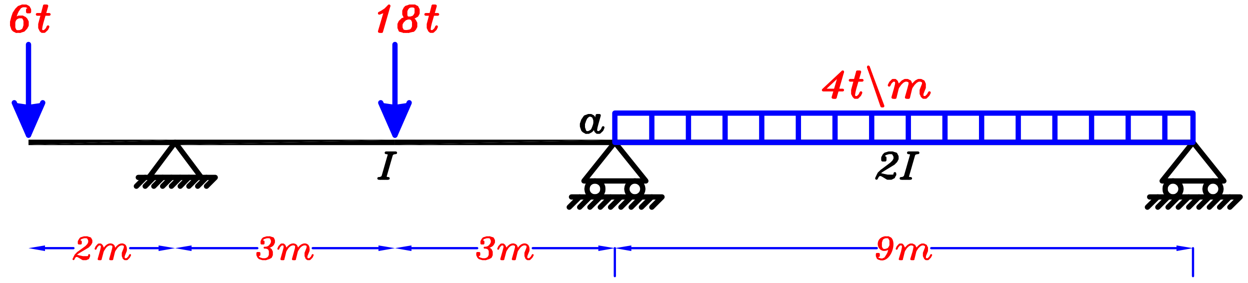
B.M.D Due to settlement



S.F.D Due to settlement

Example

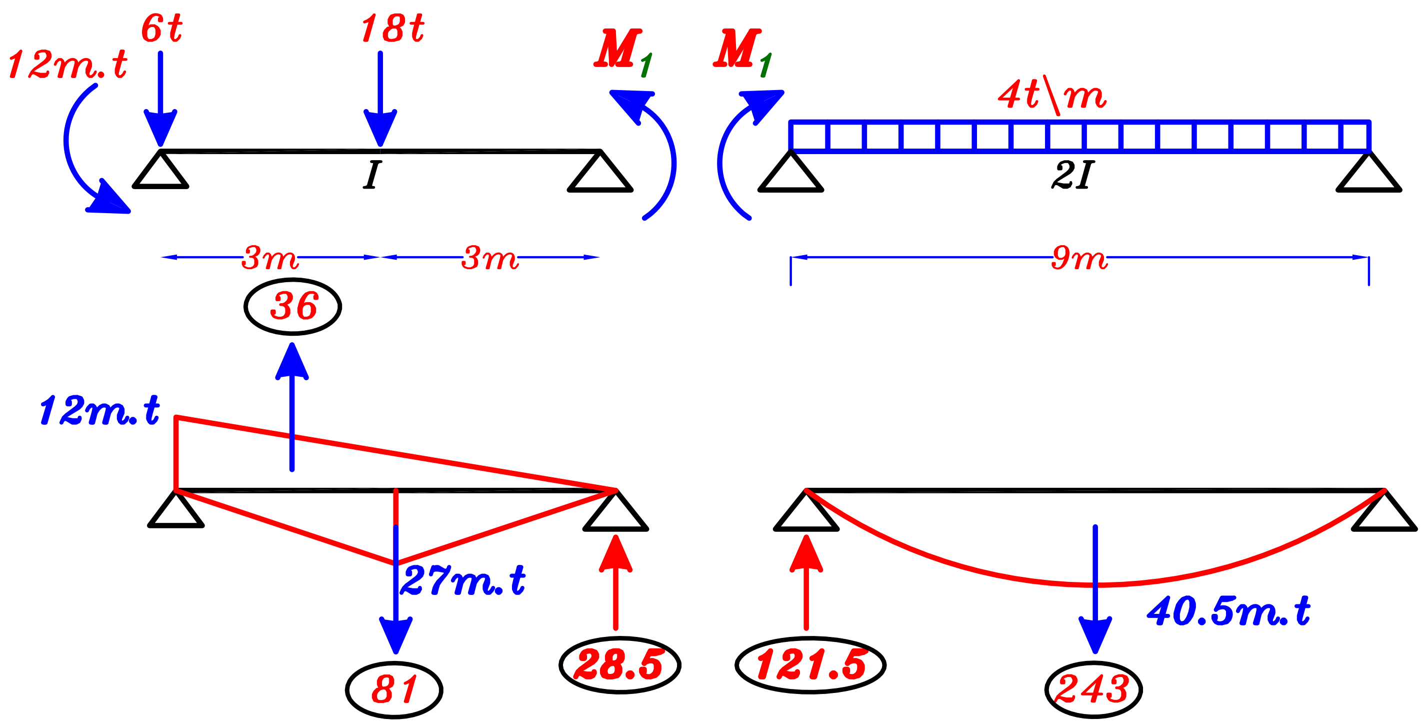
For the shown beam draw the B.M.D if support a settles by 1 Cm . ($E = 2000\ t/cm^2$, $I = 24000\ cm^4$)



خد بالك

ال *moments* الناتجة من هذه المعادلة نتيجة تأثير ال *Settlement* فقط فاذا كانت المسألة بها *Settlement* و بها *Loads* نقسمها الى جزئين الاول به ال *Loads* و الثانى ال *Settlement* و نوجد ال *moments* لكل مسألة على حدا ثم نجمعهما معا فتكون هذه هى ال *Final moments*

Due to loads

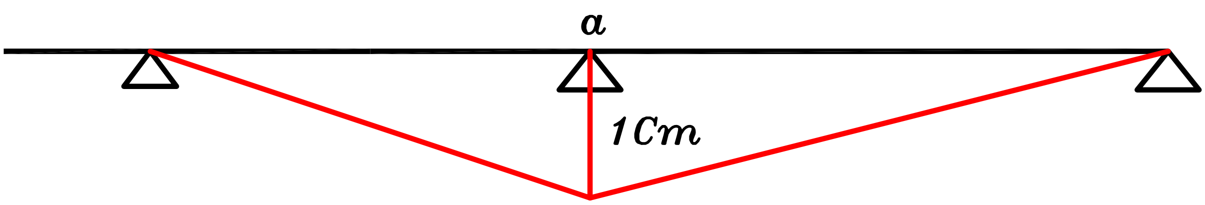


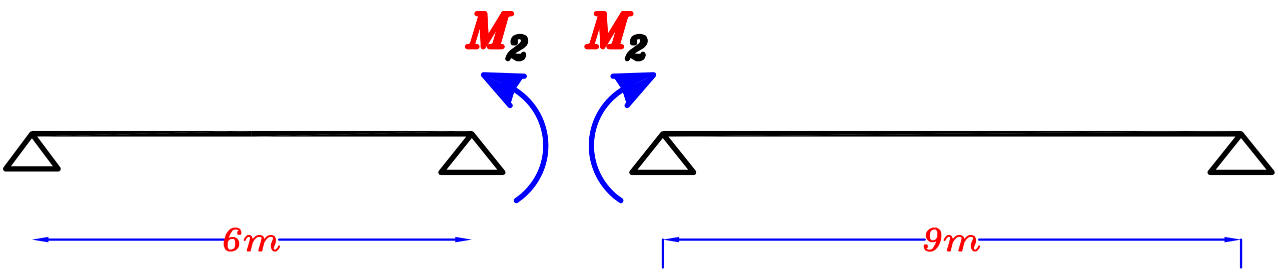
$$0+2M_1\left(\frac{6}{1}+\frac{9}{2}\right)+0=-6\left(\frac{28.5}{1}+\frac{121.5}{2}\right)$$

$$\boxed{M_1 = -25.5\ m.t}$$

Due to Settlement

$E = 20{,}000{,}000\ t\backslash m^2 \qquad I = 0.00024 m^4 \qquad EI = 4800\ t.m^2$





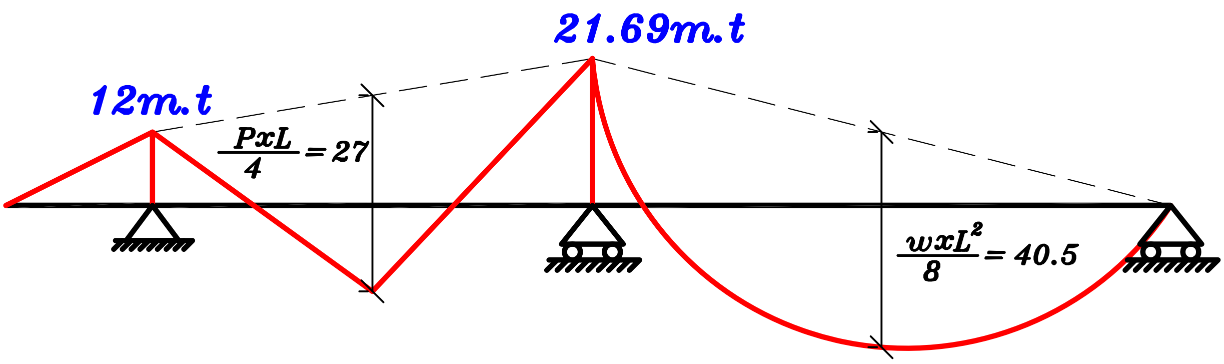
$$0 + 2M_2\left(\frac{6}{EI} + \frac{9}{2EI}\right) + 0 = 6\left(\frac{\overset{Cm}{1-0}}{\underset{Cm}{600}} + \frac{\overset{Cm}{1-0}}{\underset{Cm}{900}}\right)$$

$$\boxed{M_2 = 3.81 m.t}$$

$$M_{final} = M_{Load} + M_{Settlement}$$

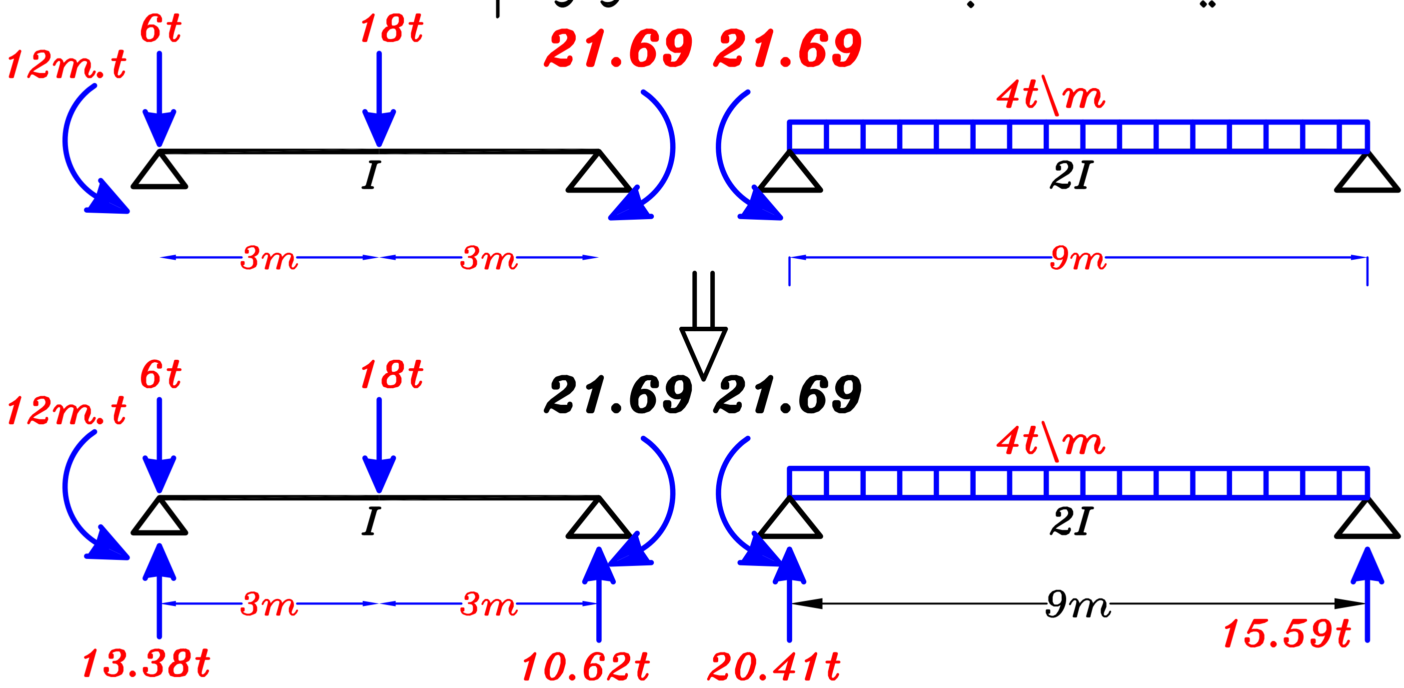
$$M_{final} = -25.5 + 3.81 = 21.69\ m.t$$

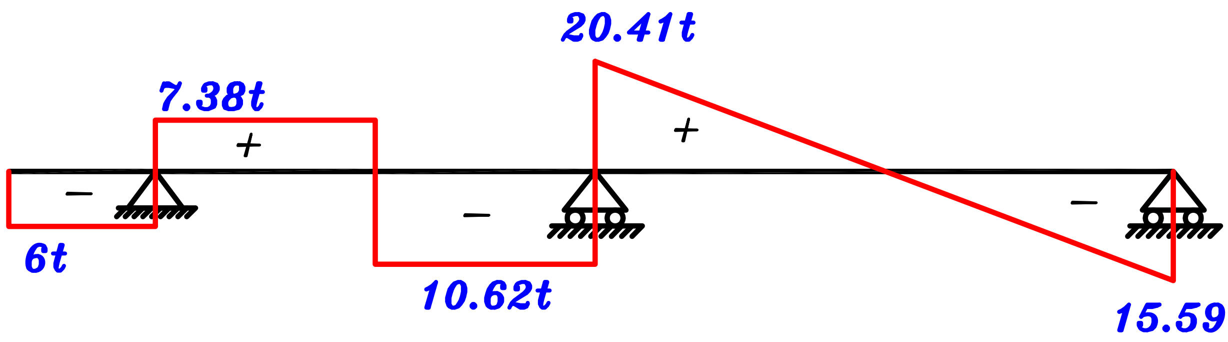
$$\boxed{M_{Final} = -21.69 m.t}$$



B.M.D

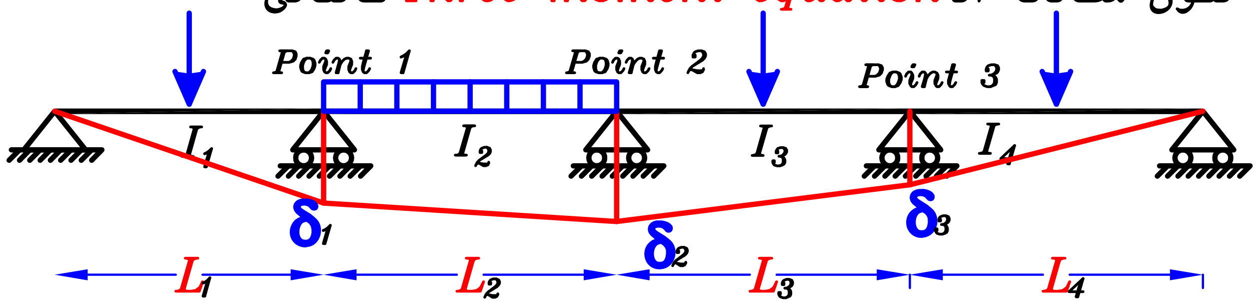
و لو طلب مننا ال S.F.D بمعرفة ال moment فى بداية و نهاية كل member يمكننا حساب ال Reactions و رسم ال S.F.D.

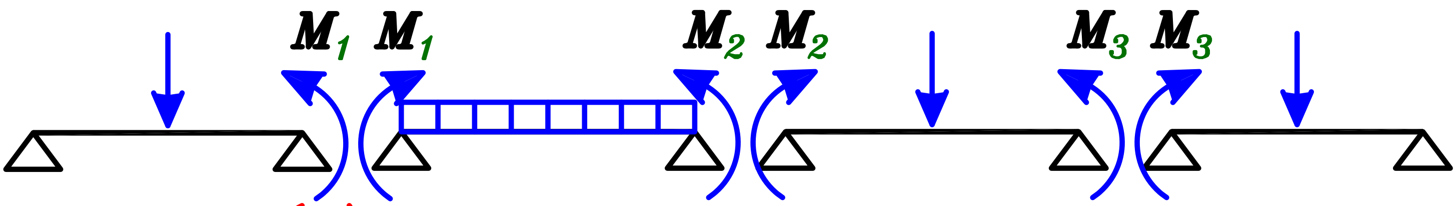




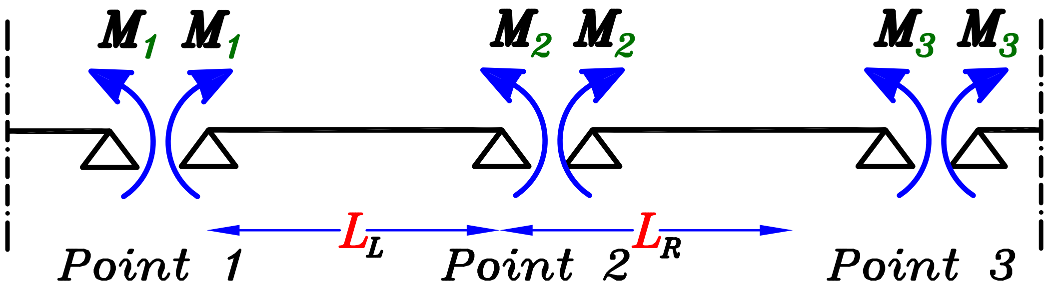
S.F.D

من الممكن بدلا من تقسيم المسألة الى جزئين أن نحلها مرة واحدة و فى هذه الحالة تكون معادلة ال *Three moment equation* كالتالى





At Point (2) :



$$\boxed{M_1\frac{L_L}{I_L}+2M_2\left(\frac{L_L}{I_L}+\frac{L_R}{I_R}\right)+M_3\frac{L_R}{I_R} = 6E\left(\frac{\delta_2-\delta_1}{L_L}+\frac{\delta_2-\delta_3}{L_R}\right)-6\left(\frac{r_L}{I_L}+\frac{r_R}{I_R}\right)}$$

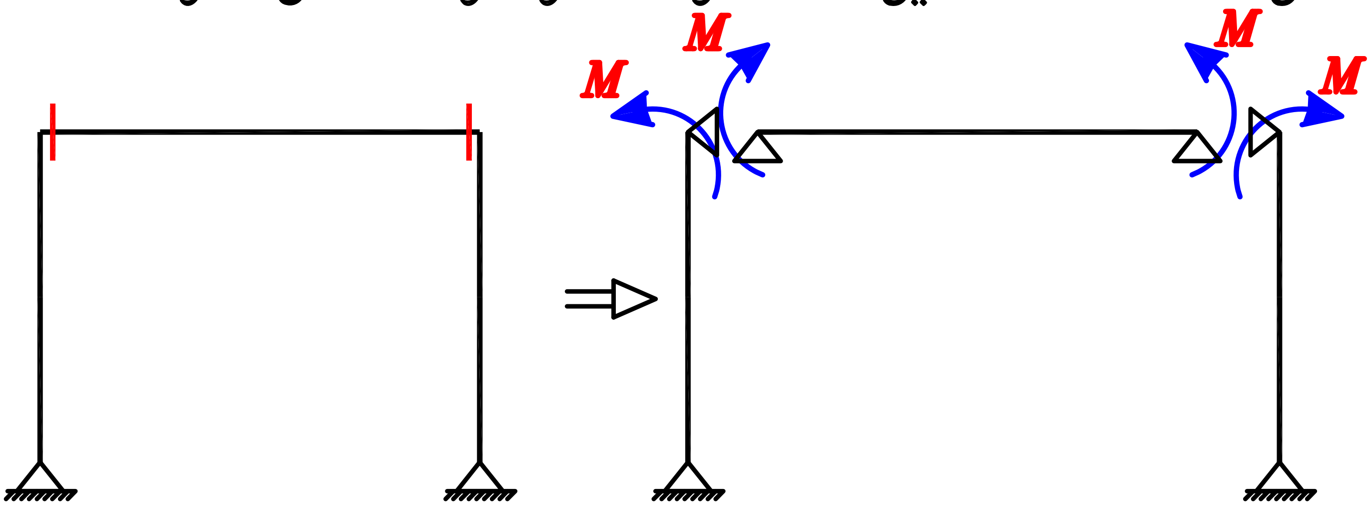
$$0+2M_1\left(\frac{6}{I}+\frac{9}{2I}\right)+0$$

$$=-6\left(\frac{28.5}{I}+\frac{121.5}{2I}\right)+6\times 20,000,000\left(\frac{1-0}{600}+\frac{1-0}{900}\right)$$

$$\boxed{M_{Final}=-21.69\,m.t}$$

FRAMES

فى الـ *Frames* تكون الـ *moments* المجهولة عند الـ *Fixation*
و عند الـ *Intermediate support* و عند الـ *Connections*
و لحل الـ *Frames* نتخيل كأننا فردناها و حولناها الى كمرة



و لتحديد اشارات الـ *moment*

نضع الـ *moment* دائما يحزم الـ *member* و تكون الاشارات كالتالى

داخل الـ *Frame* ⟸ +Ve

خارج الـ *Frame* ⟸ −Ve

دائما نفرض أى عزم مجهول أنه +Ve

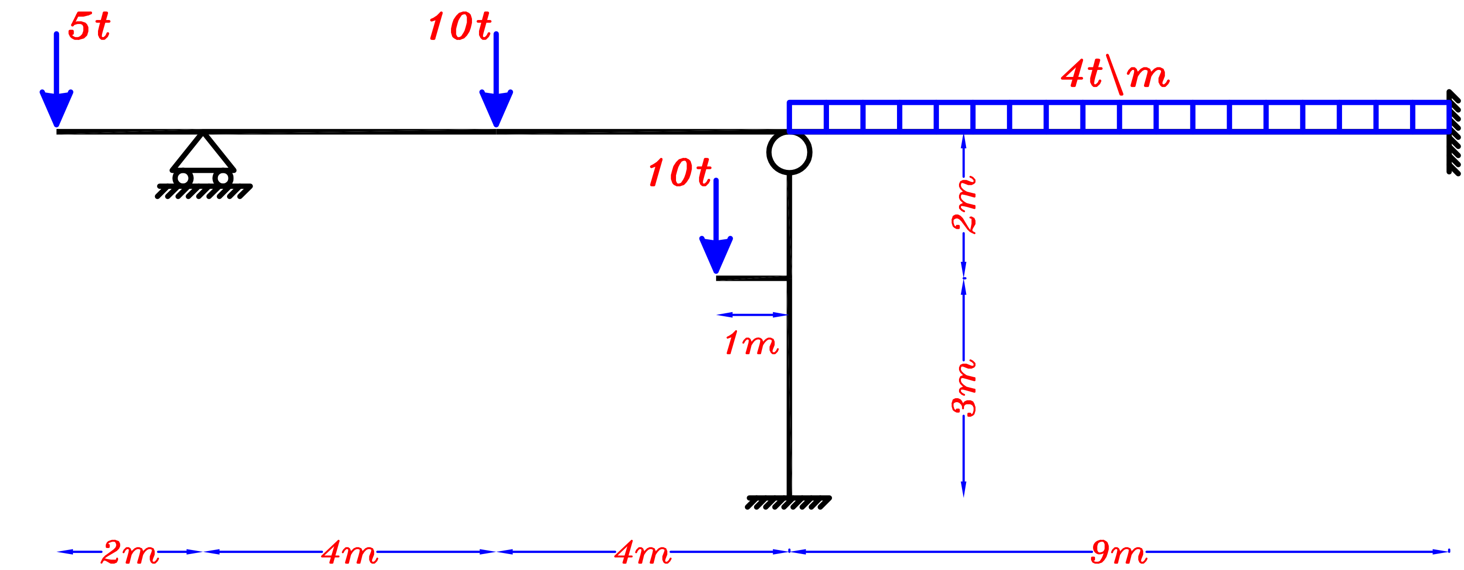
و لتحديد اشارات الـ *Elastic reactions*

اذا كان ذيل سهم الـ *Elastic reaction* مع ذيل سهم الـ *moment* الـ +Ve
يكون الـ *Elastic reaction* ⟸ +Ve

اذا كان ذيل سهم الـ *Elastic reaction* عكس ذيل سهم الـ *moment* الـ +Ve
يكون الـ *Elastic reaction* ⟸ −Ve

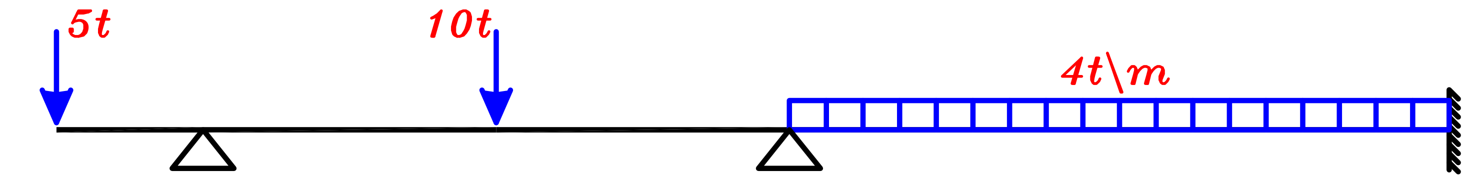
Example

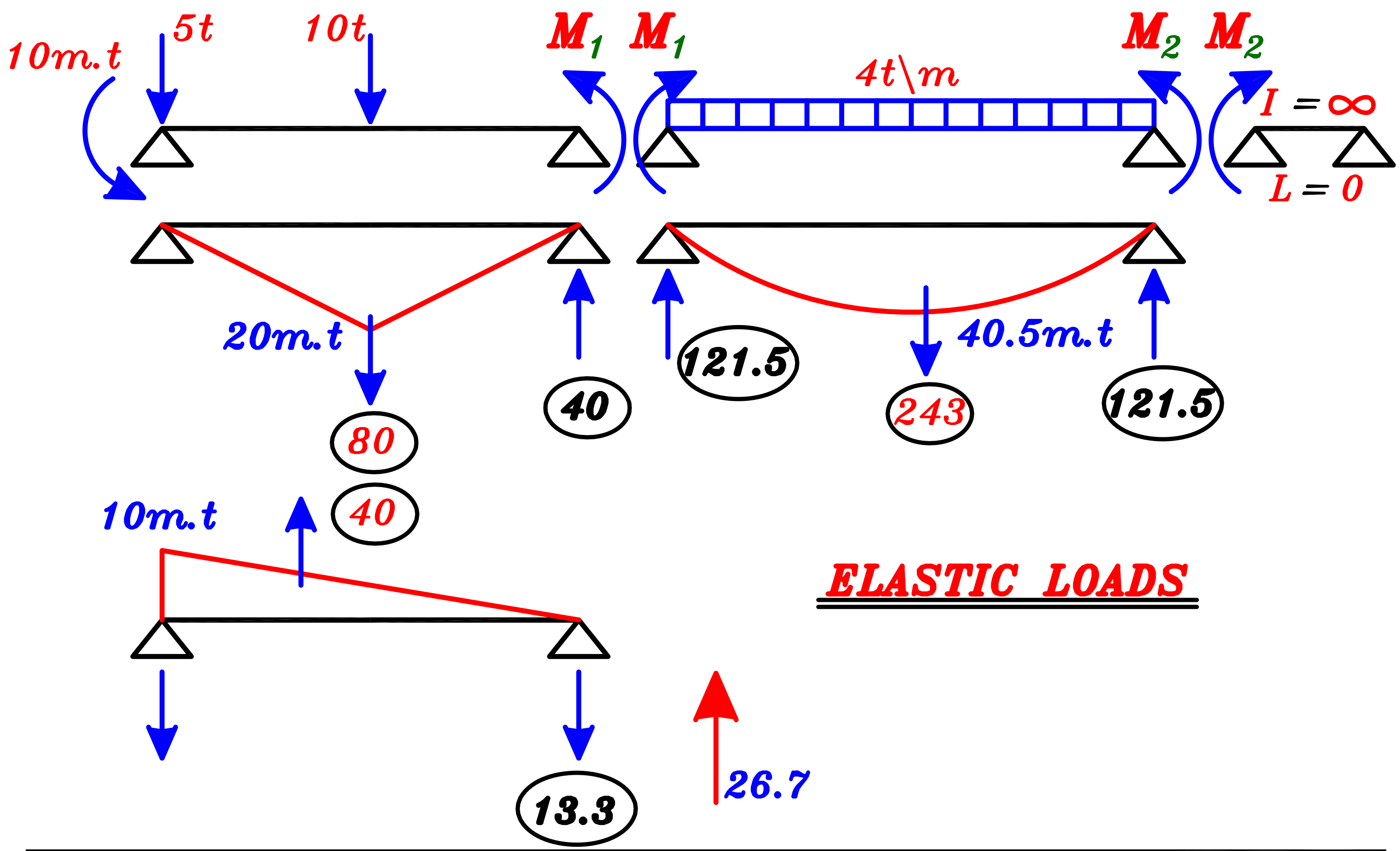
For the shown frame draw the B.M.D & S.F.D .



هذا الـ *Frame* سوف نقوم بحله على جزئين

Part (1)





Equation of three moment at joint (1)

$$2M_1\ (\ 8 + 9\ ) + M_2\ (\ 9\ ) = -6\ (\ 26.67 + 121.5\ )$$

$$34\ M_1 + 9\ M_2 = -889 \Rightarrow EQ.(1)$$

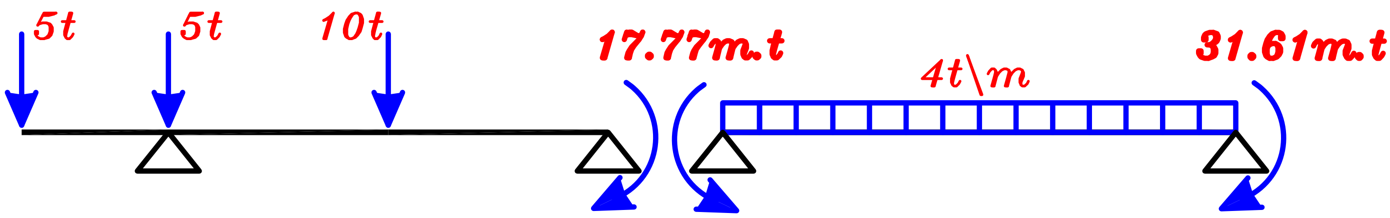
Equation of three moment at joint (2)

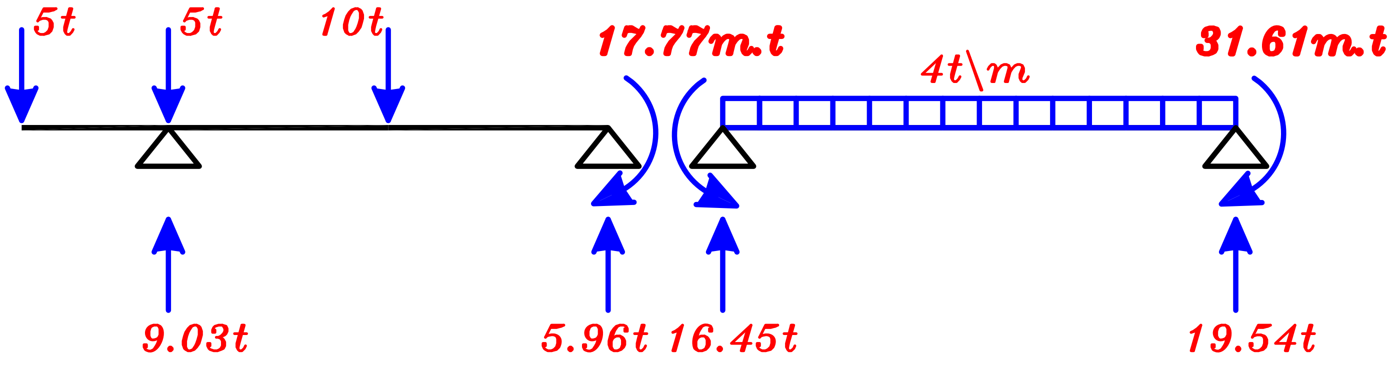
$$M_1\ (\ 9\ ) + 2\ M_2\ (\ 9 + 0\ ) = -\ 6\ (\ 121.5 + 0\ )$$

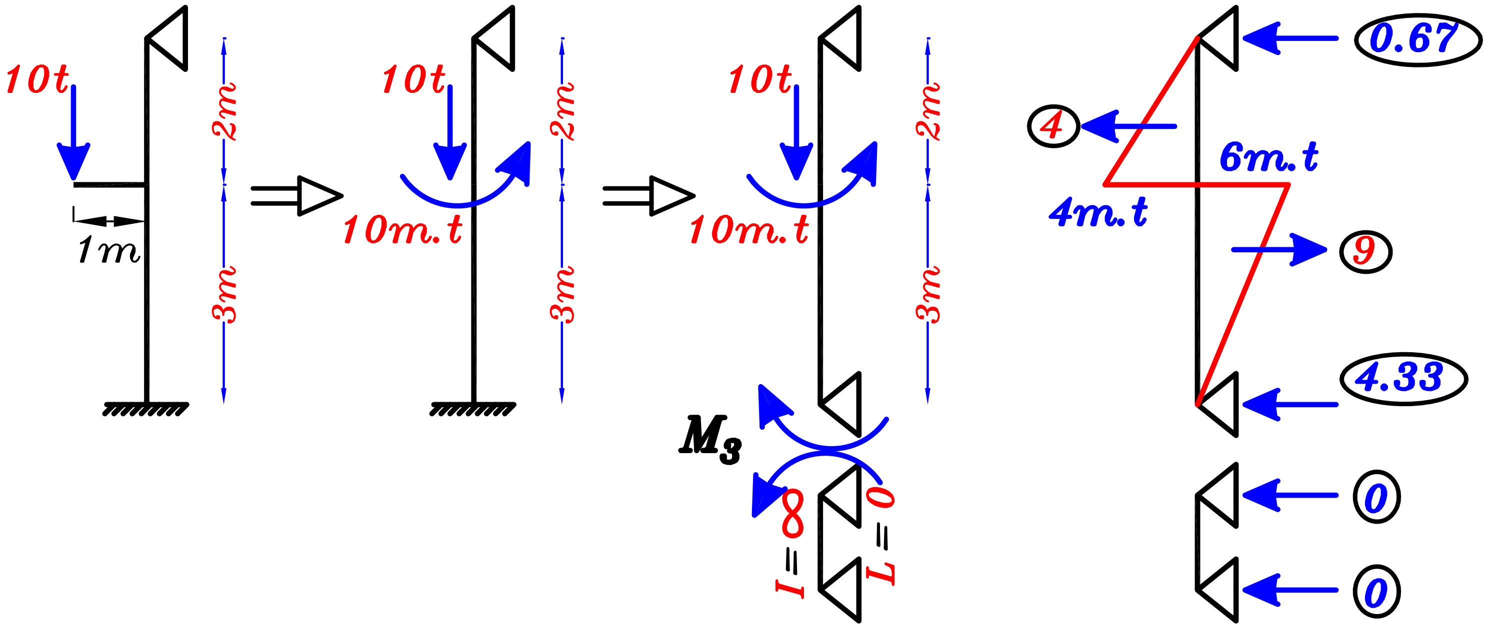
$$9\ M_1 + 18\ M_2 = -729 \Rightarrow EQ.(2)$$

Solving the two equations:

$$\boxed{M_1 = -17.77m.t} \qquad \boxed{M_2 = -31.61m.t}$$





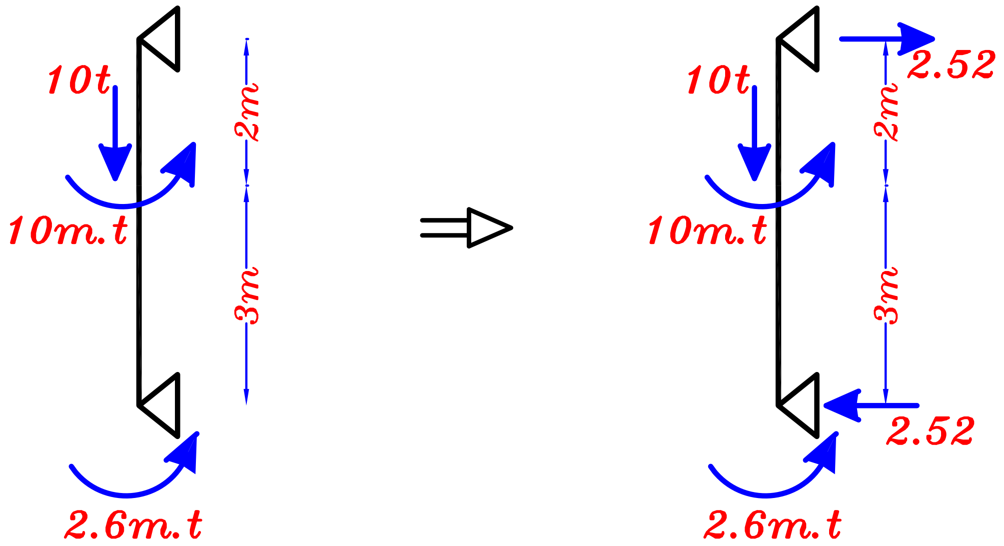


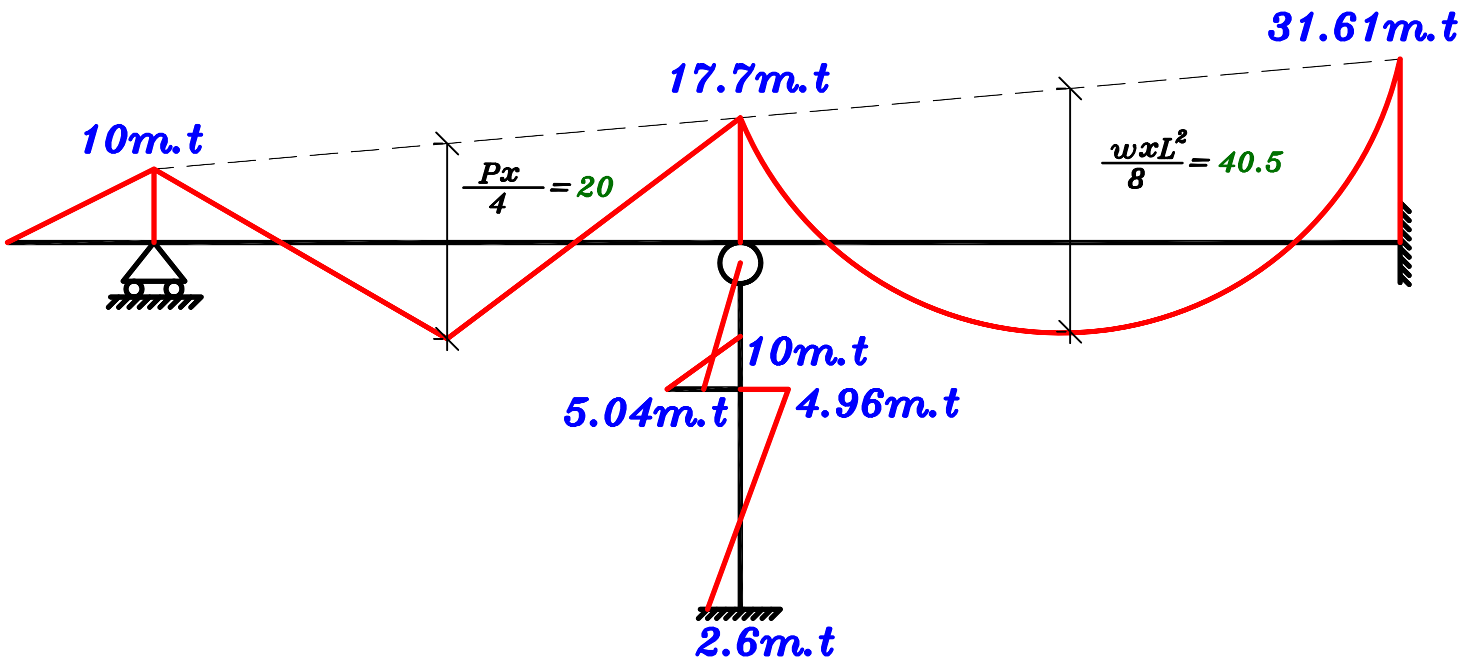
ELASTIC LOADS

Equation of three moment at joint (3)

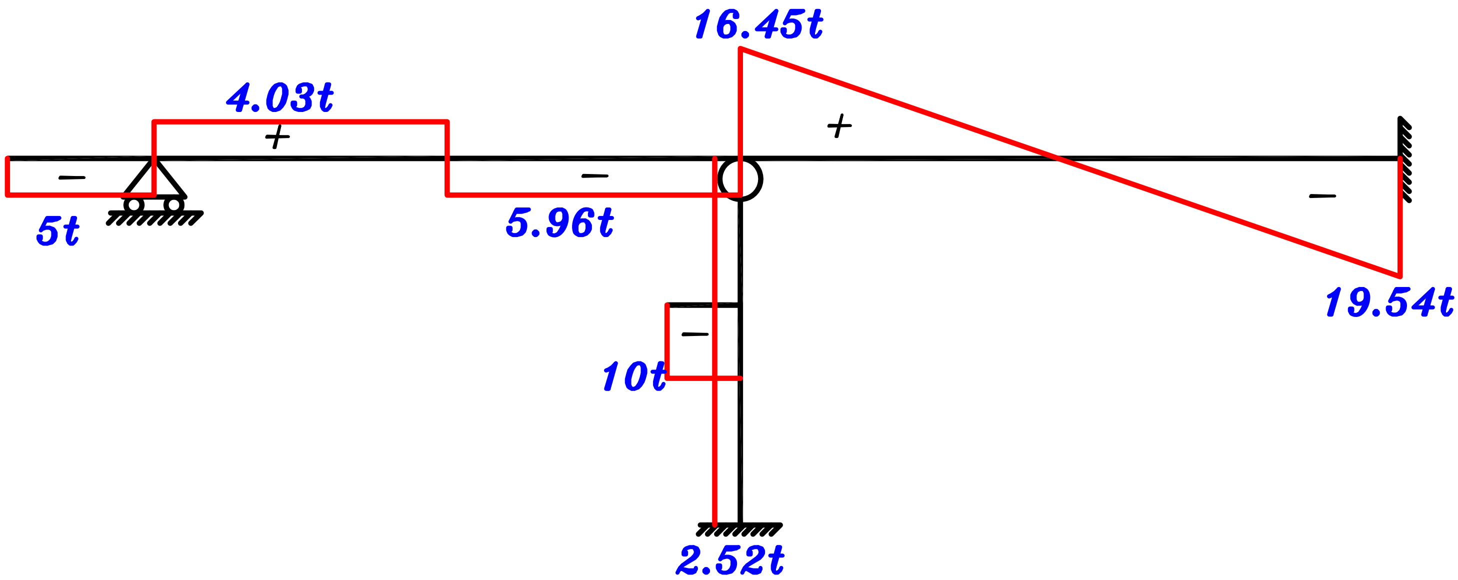
$$2M_3(5) = -6(4.33)$$

$$\boxed{M_3 = -2.60\,m.t}$$




31.61m.t
17.7m.t
10m.t
$\frac{Px}{4} = 20$
$\frac{wxL^2}{8} = 40.5$
10m.t
5.04m.t
4.96m.t
2.6m.t

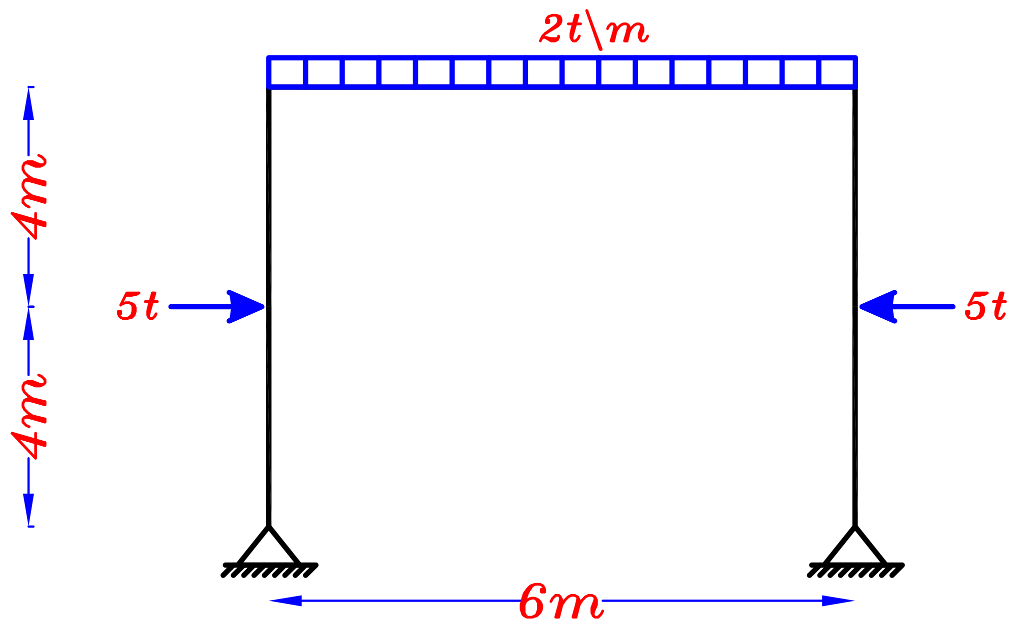
B.M.D

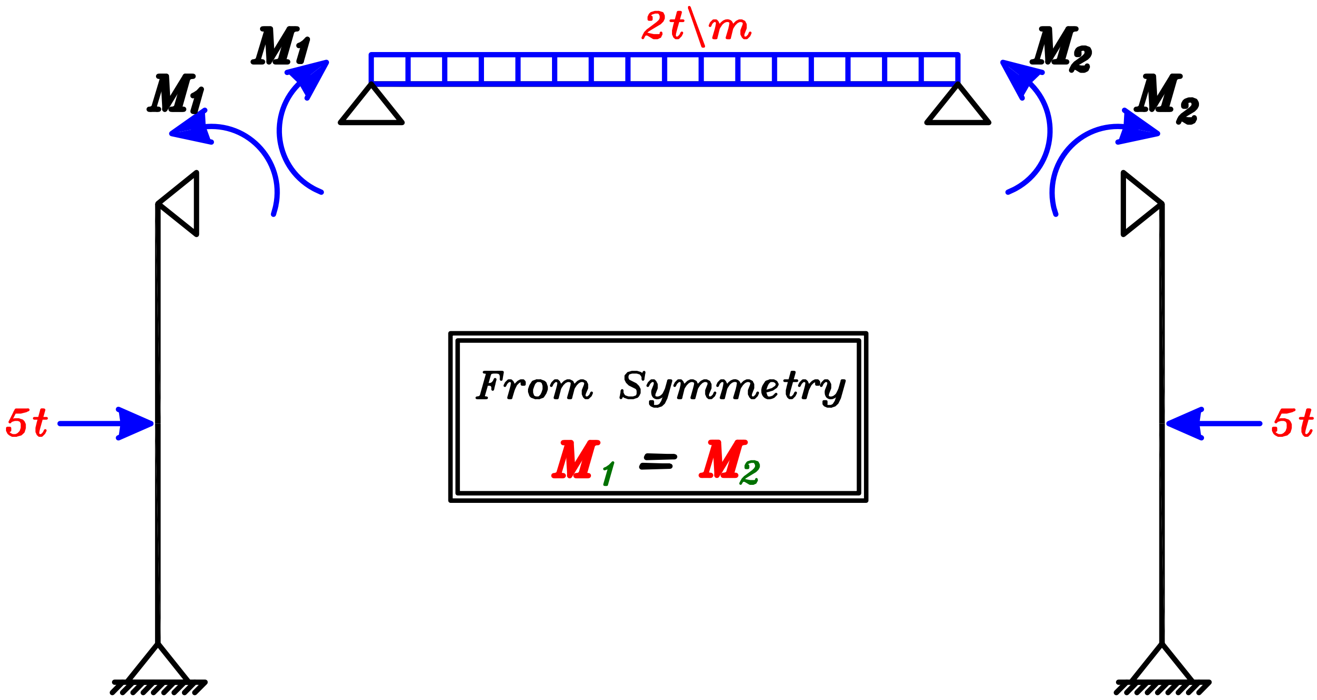

16.45t
4.03t
+
+
−
−
−
5t
5.96t
−
10t
19.54t
2.52t

S.F.D

Example

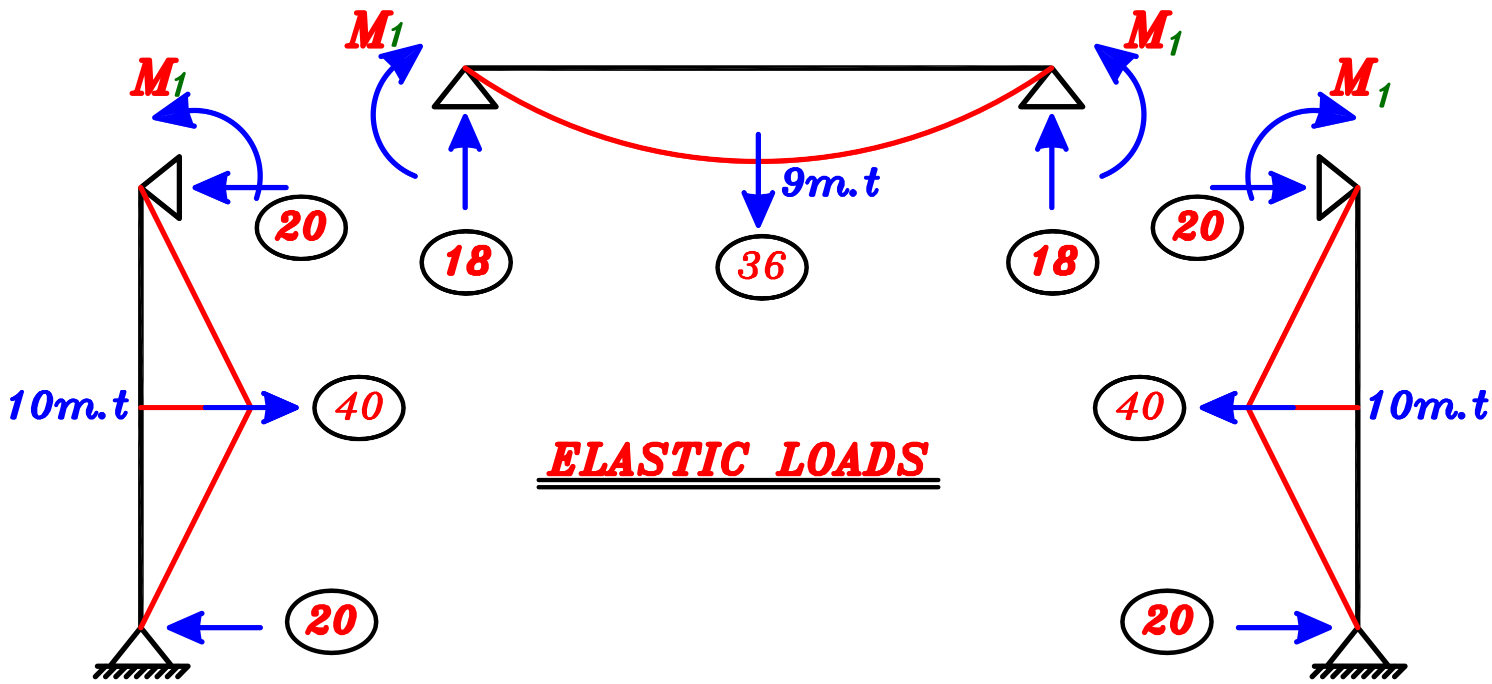
For the shown frame draw the B.M.D & S.F.D .





From Symmetry

$M_1 = M_2$



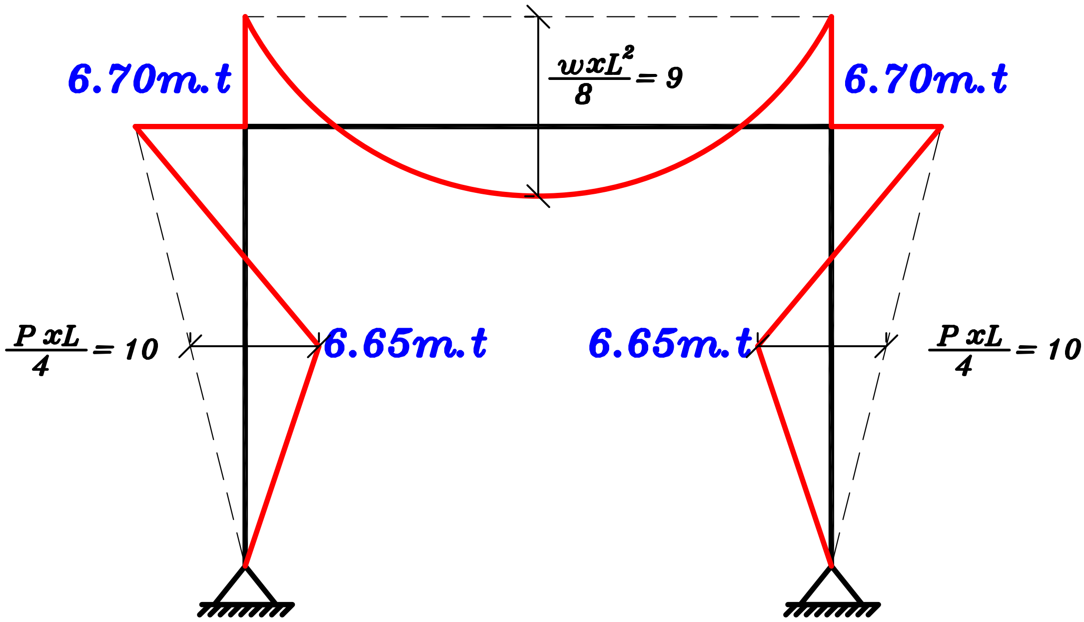
ELASTIC LOADS

Equation of three moment at joint (1)

$$0 + 2M_1\left(\frac{8}{1}+\frac{6}{1}\right) + M_1\frac{6}{1} = -6\left(\frac{20}{1}+\frac{18}{1}\right)$$

$$\boxed{M_1 = -6.70m.t}$$

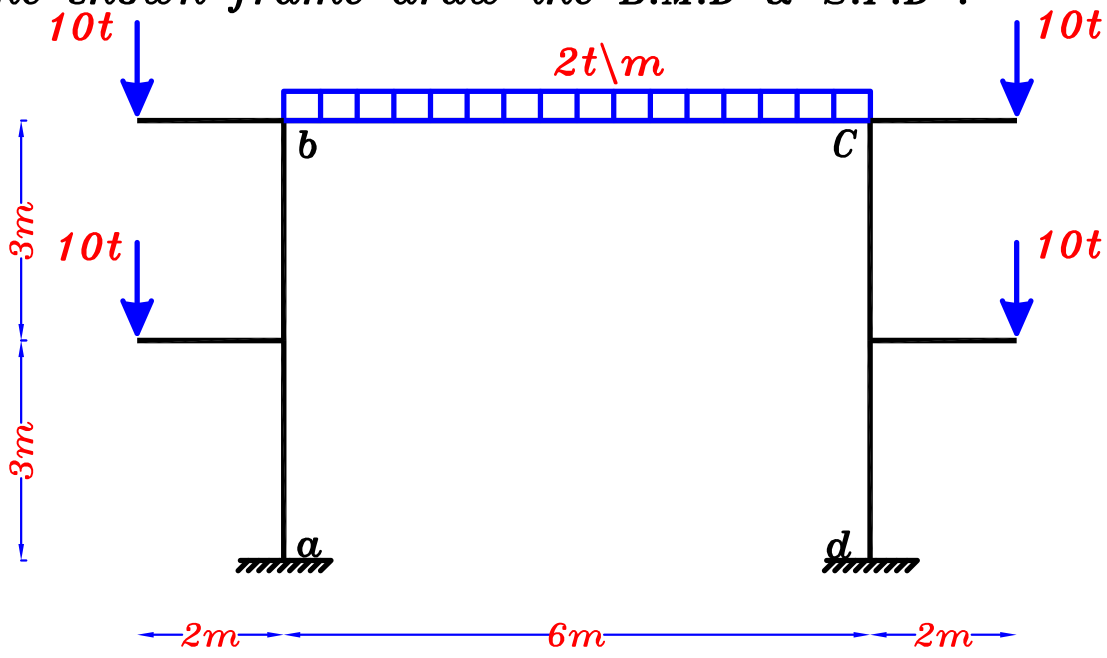
Frame خارج ال



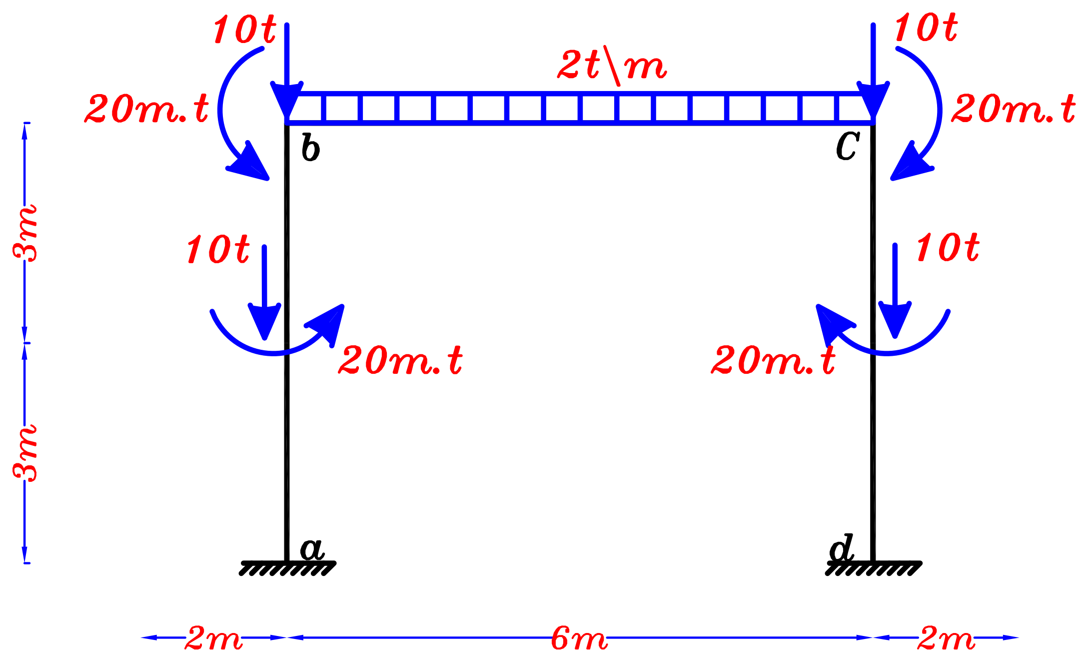
B.M.D

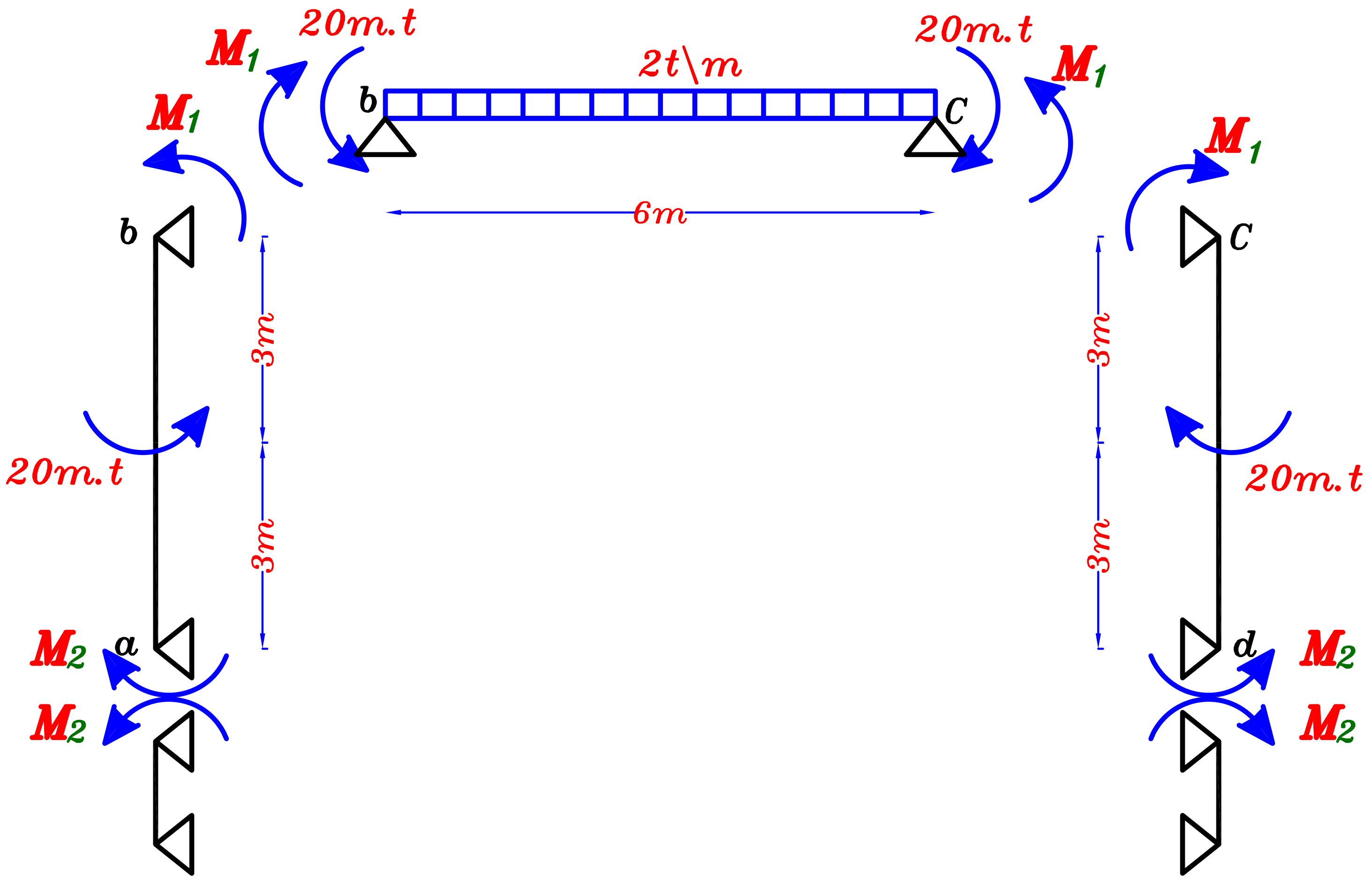
Example

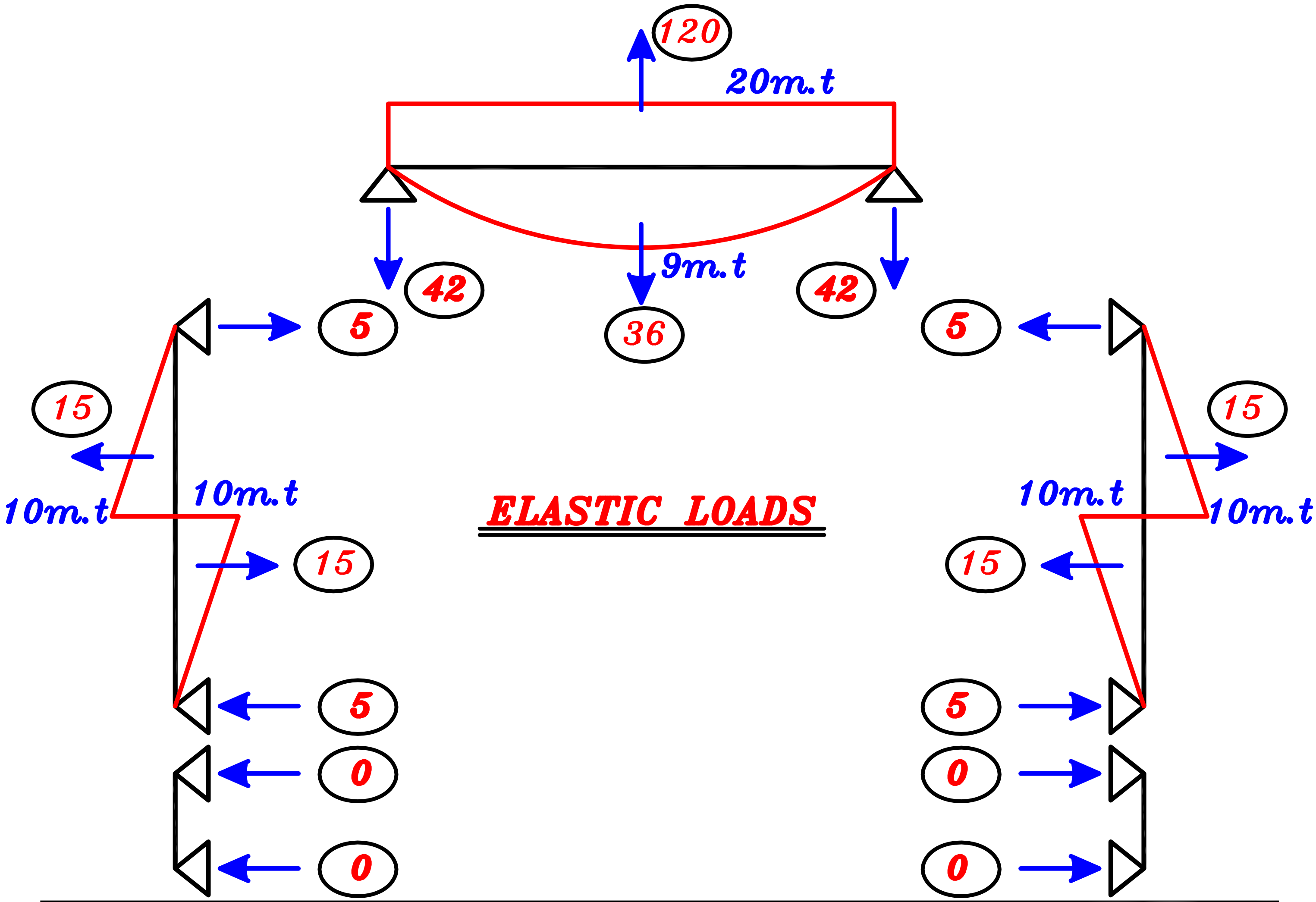
For the shown frame draw the B.M.D & S.F.D .



نزيل كل *Cantliver* و نضع تأثيرة *Force* و *moment*




M1
20m.t
2t\m
20m.t
M1
M1
b
C
M1
b
6m
C
3m
3m
3m
3m
20m.t
20m.t
M2
a
d
M2
M2
M2


120
20m.t
9m.t
42
42
5
36
5
15
15
10m.t
10m.t
10m.t
10m.t
ELASTIC LOADS
15
15
5
5
0
0
0
0

Equation of three moment at joint (a)

$$0 + 2M_1(0 + 6) + M_2(6) = -6(0 + 5)$$

$$12M_1 + 6M_2 = -30 \quad \Rightarrow EQ.(1)$$

Equation of three moment at joint (b)

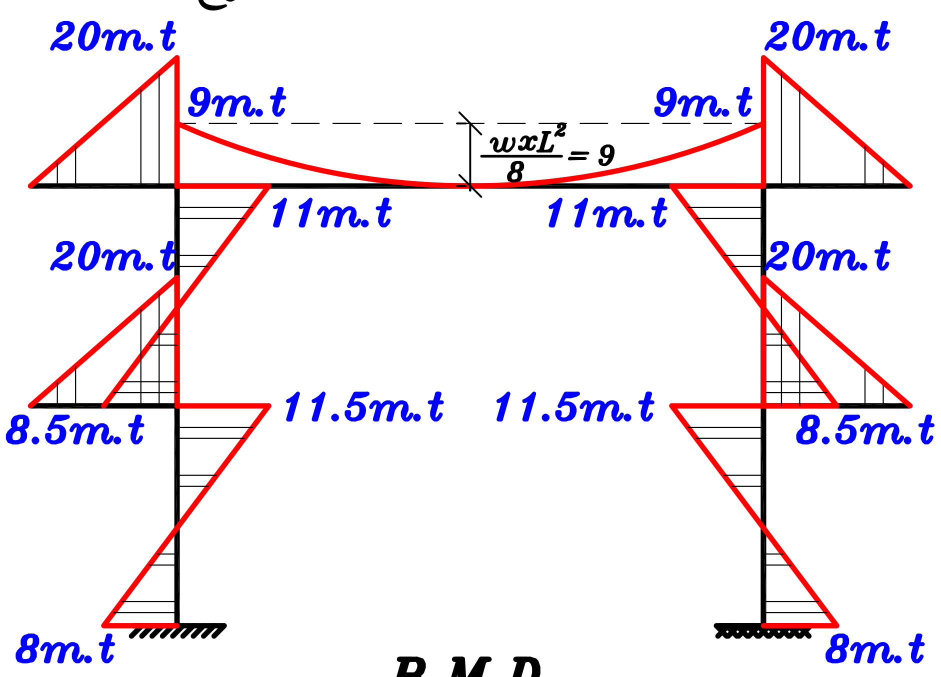
$$M_1(6) + 2M_1(6 + 6) + M_2(6) = -6(-5 - 42)$$

$$6M_1 + 30M_2 = 282 \quad \Rightarrow EQ.(2)$$

Solving the two equations:

$$\boxed{M_1 = -8m.t} \qquad \boxed{M_2 = 11m.t}$$

Frame خارج ال   Frame داخل ال

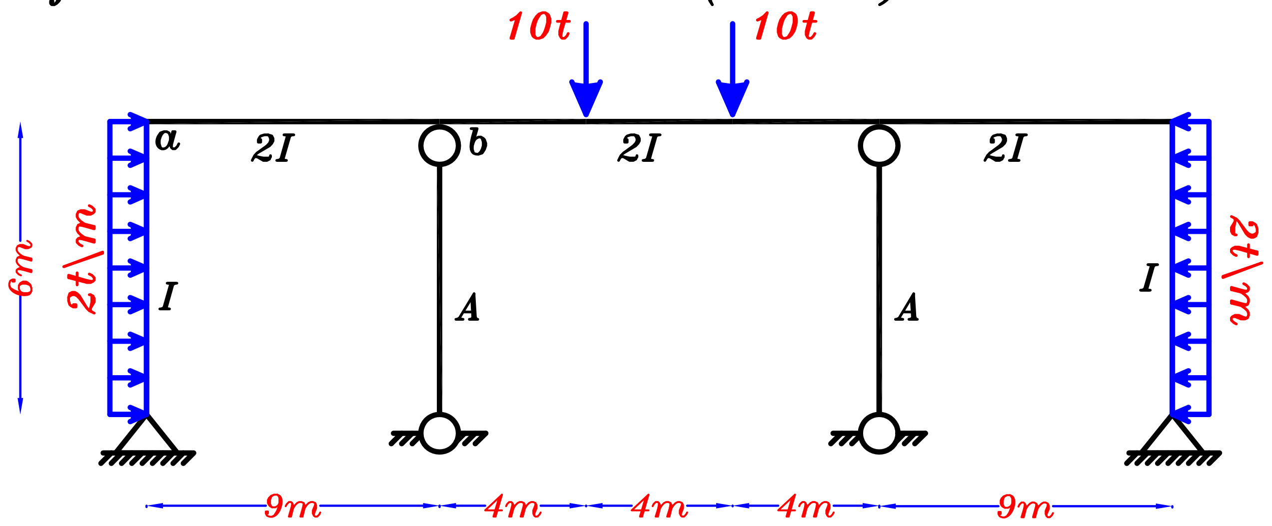


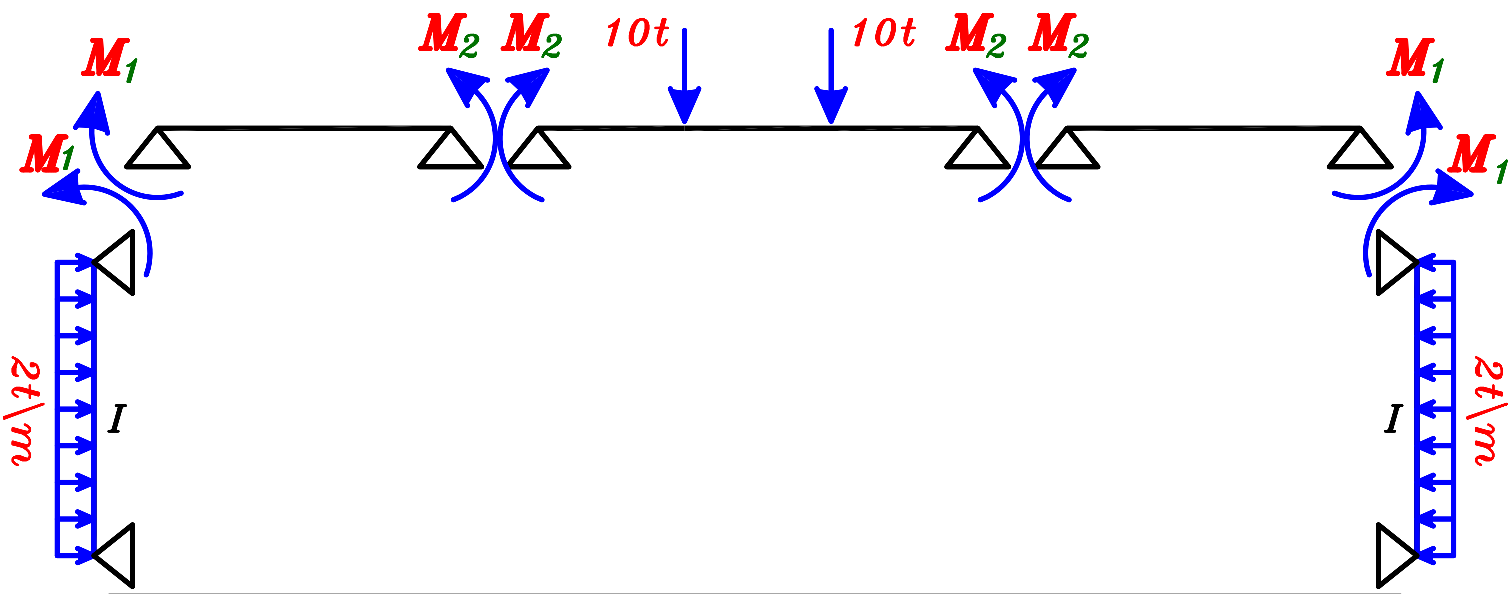
B.M.D

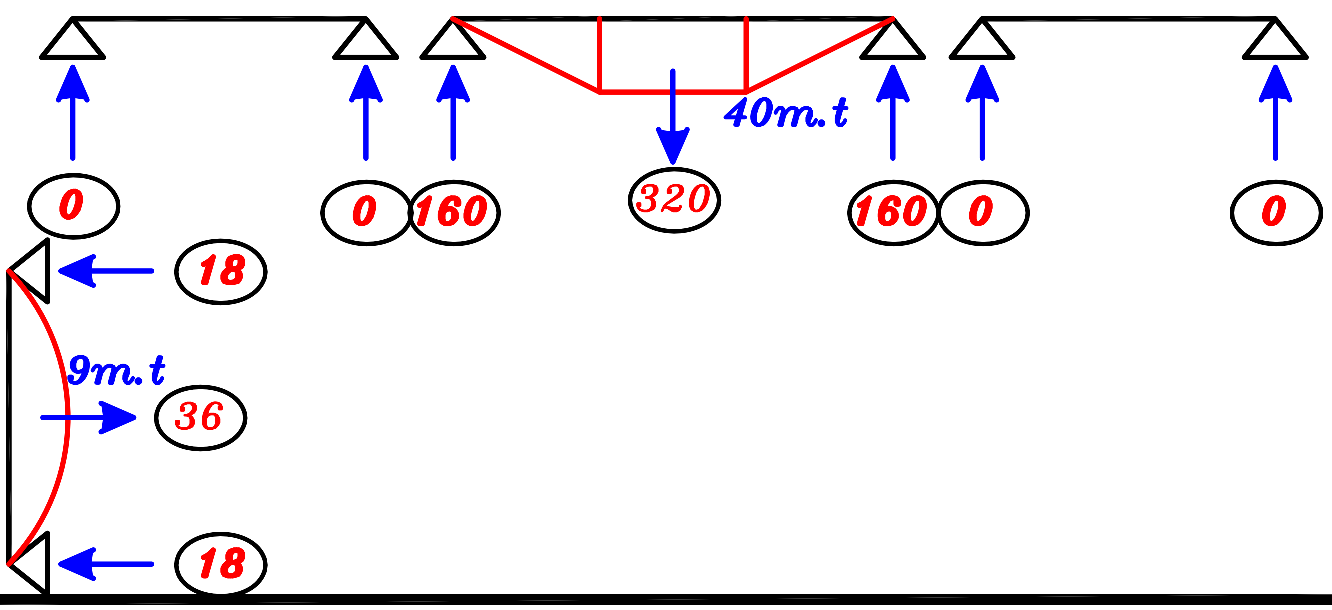
Example

For the shown frame draw the B.M.D.

1) If the link member is rigid.
2) If the link member is elastic(EA=5EI).







Equation of three moment at joint (a)

$$0 + 2M_1\left(\frac{6}{1} + \frac{9}{2}\right) + M_2\frac{9}{2} = -6\left(\frac{18}{1} + 0\right)$$

$$21M_1 + 4.5M_2 = -108 \quad \Rightarrow EQ.(1)$$

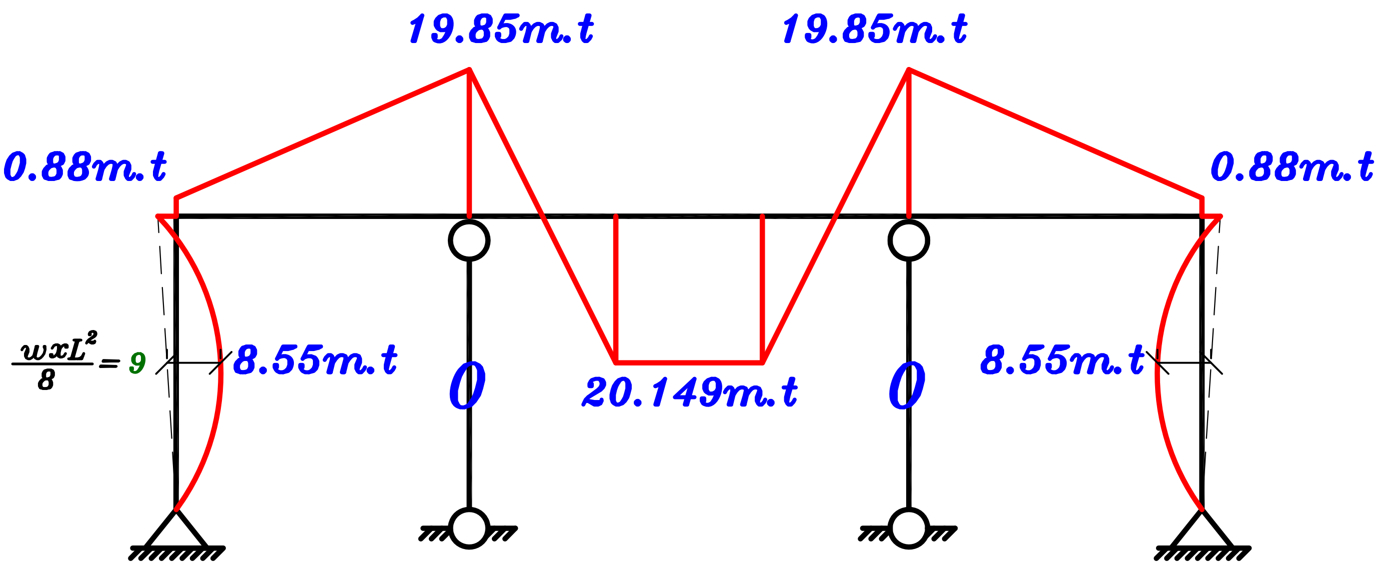
Equation of three moment at joint (b)

$$M_1\frac{9}{2} + 2M_2\left(\frac{9}{2} + \frac{12}{2}\right) + M_2\frac{12}{2} = -6\left(0 + \frac{160}{2}\right)$$

$$4.5M_1 + 27M_2 = -540 \quad \Rightarrow EQ.(2)$$

Solving the two equations:

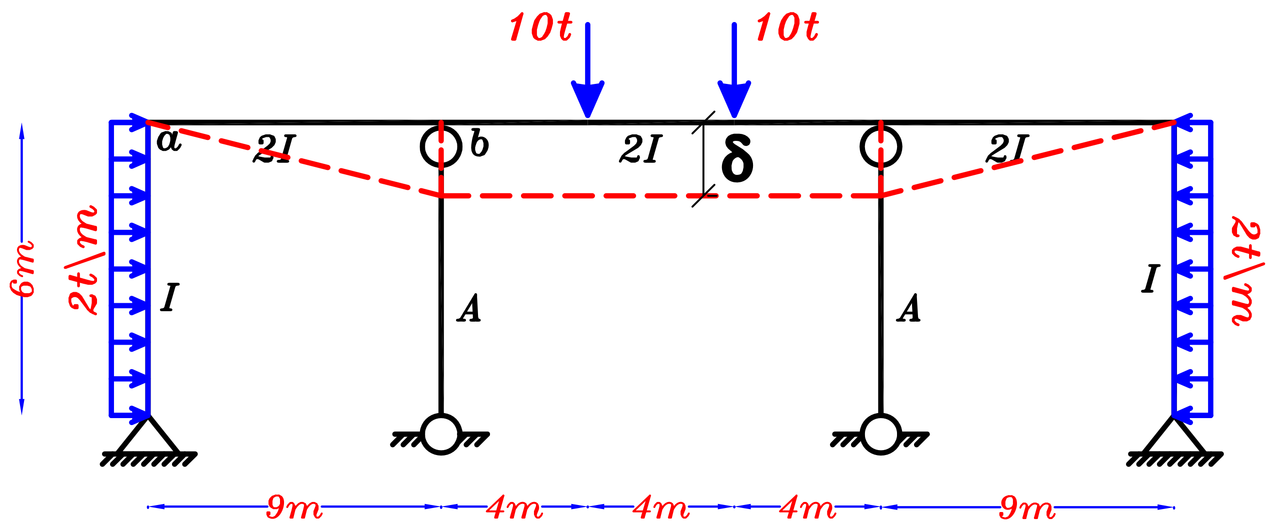
$$\boxed{M_1 = -0.88m.t} \qquad \boxed{M_2 = -19.85m.t}$$

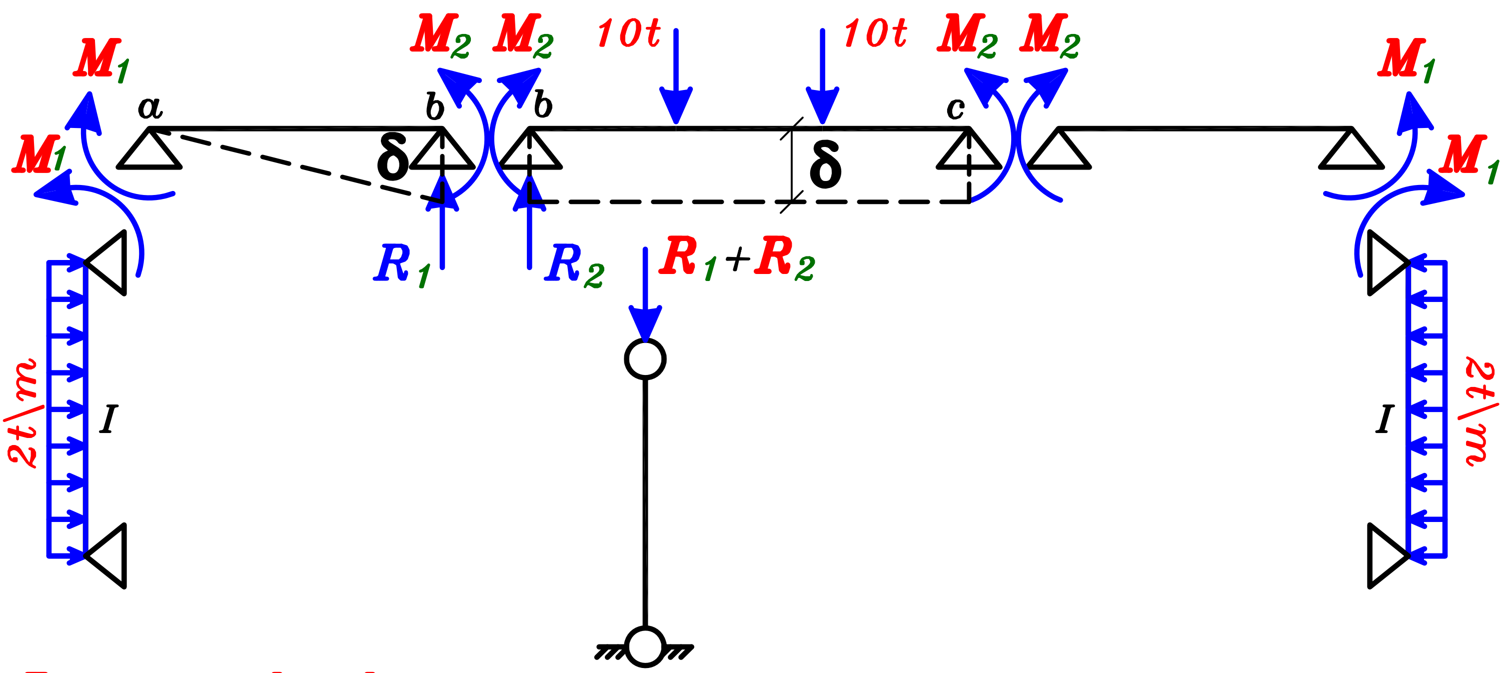


B.M.D

1) If the link member is rigid.

2) If the link member is elastic(EA=5EI).





From member bc

$$R_2 = \frac{\Sigma\, Load}{2} = 10t$$

From member ab

$$\Sigma M \ @ \ a = 0$$

$$R_1 = \frac{M_1 - M_2}{9}$$

$$\text{Force in Link} = R_1 + R_2 = 10 + \frac{M_1 - M_2}{9} = \frac{90 + M_1 - M_2}{9}$$

$$\delta_{Link} = \frac{F \times L}{E \times A} = \frac{90 + M_1 - M_2}{9} \times \frac{6}{E \times A} = \frac{90 + M_1 - M_2}{1.5} \times \frac{1}{E \times A}$$

$$= \frac{90 + M_1 - M_2}{7.5EI}$$

Equation of three moment at joint (a)

$$0 + 2M_1\left(\frac{6}{1} + \frac{9}{2}\right) + M_2\frac{9}{2}$$

$$= -6\left(\frac{18}{1} + 0\right) + 6\,EI\,\left(0 + \frac{0-\delta}{9}\right)$$

$$21M_1 + 4.5\,M_2 = -108 + 6\,EI\,(-1)\,\frac{90+M_1-M_2}{9\,x\,7.5EI}$$

$$21M_1 + 4.5\,M_2 = -108 - 8 - 0.088\,M_1 + 0.088\,M_2$$

$$21.088\,M_1 + 4.411\,M_2 = -116 \Rightarrow EQ.(1)$$

Equation of three moment at joint (b)

$$M_1\frac{9}{2} + 2M_2\left(\frac{9}{2} + \frac{12}{2}\right) + M_2\frac{12}{2}$$

$$= -6\left(0 + \frac{160}{2}\right) + 6\,EI\,\left(\frac{\delta-0}{9} + \frac{\delta-\delta}{12}\right)$$

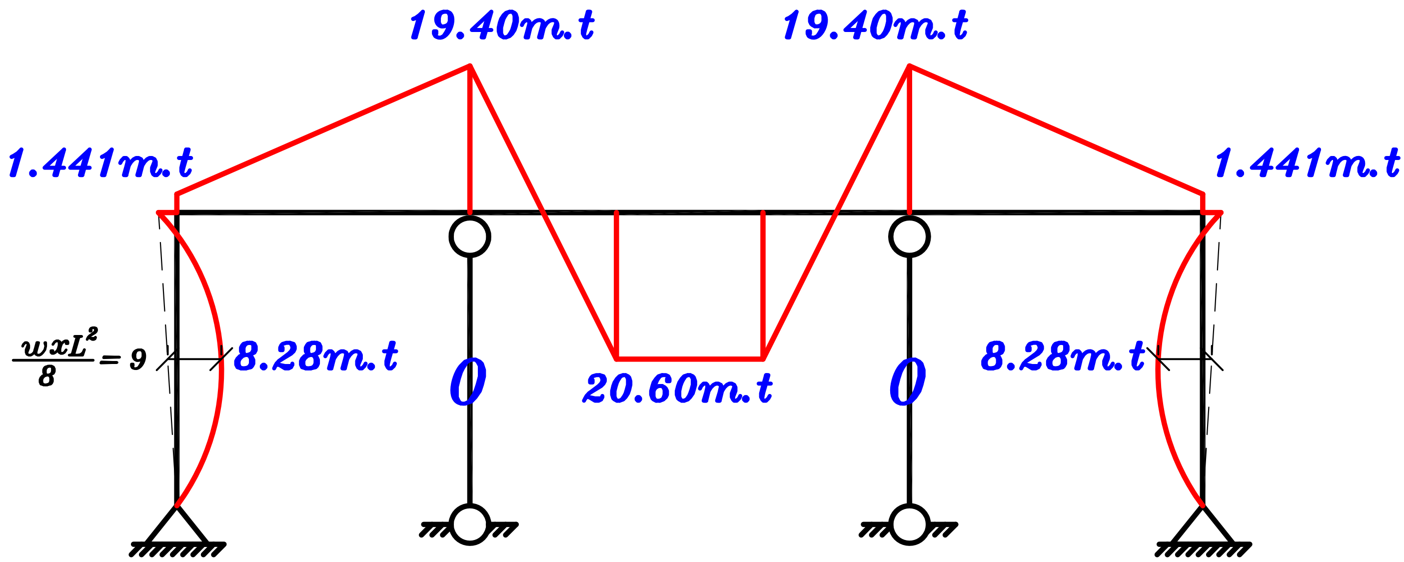
$$4.5\,M_1 + 27\,M_2 = -540 + 6\,EI\,\frac{90+M_1-M_2}{9\,x\,7.5EI}$$

$$4.5\,M_1 + 27\,M_2 = -540 + 8 + 0.088\,M_1 - 0.088\,M_2$$

$$4.411\,M_1 + 27.088\,M_2 = -532 \Rightarrow EQ.(2)$$

Solving the two equations:

$$\boxed{M_1 = -1.441 m.t} \qquad \boxed{M_2 = -19.4 m.t}$$

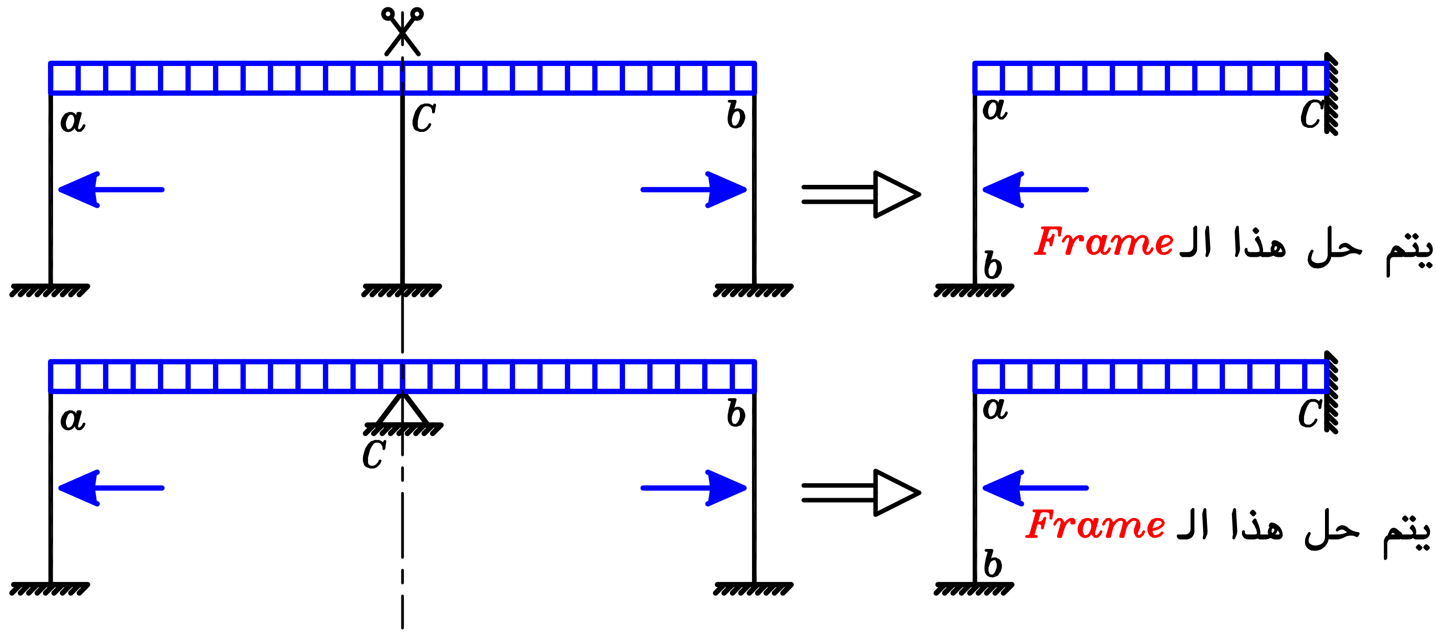


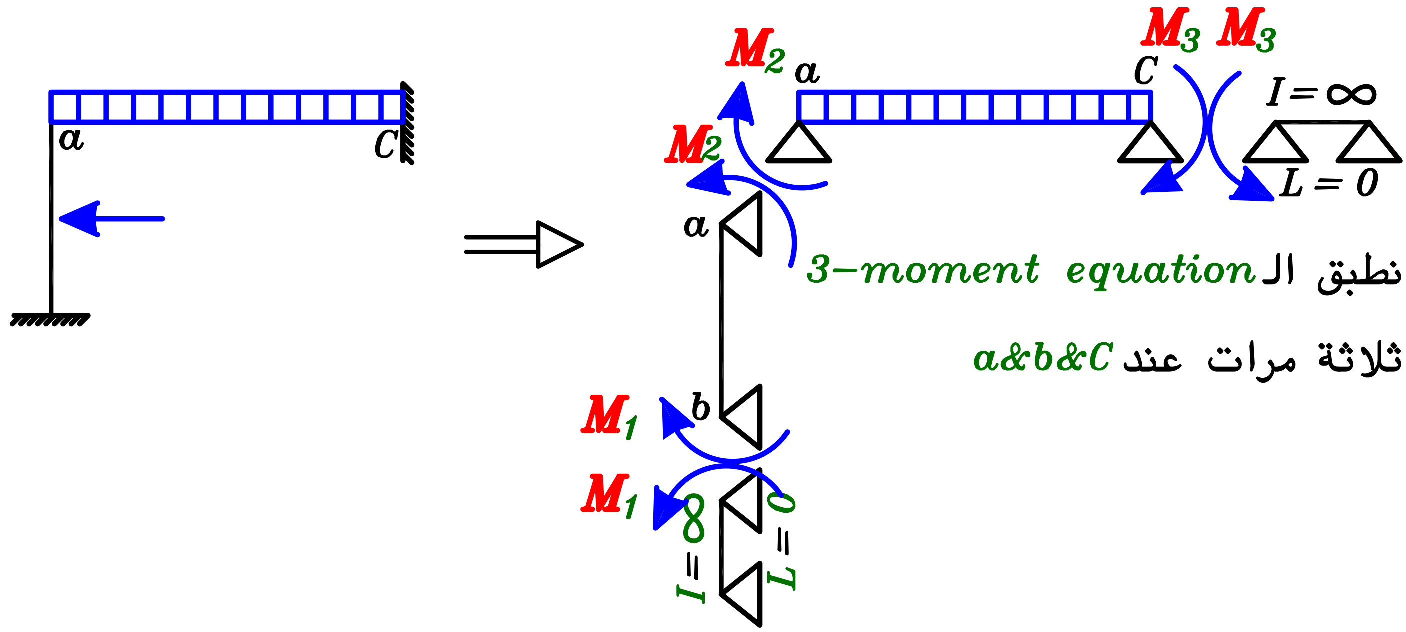
B.M.D

2) If the link member is Elastic

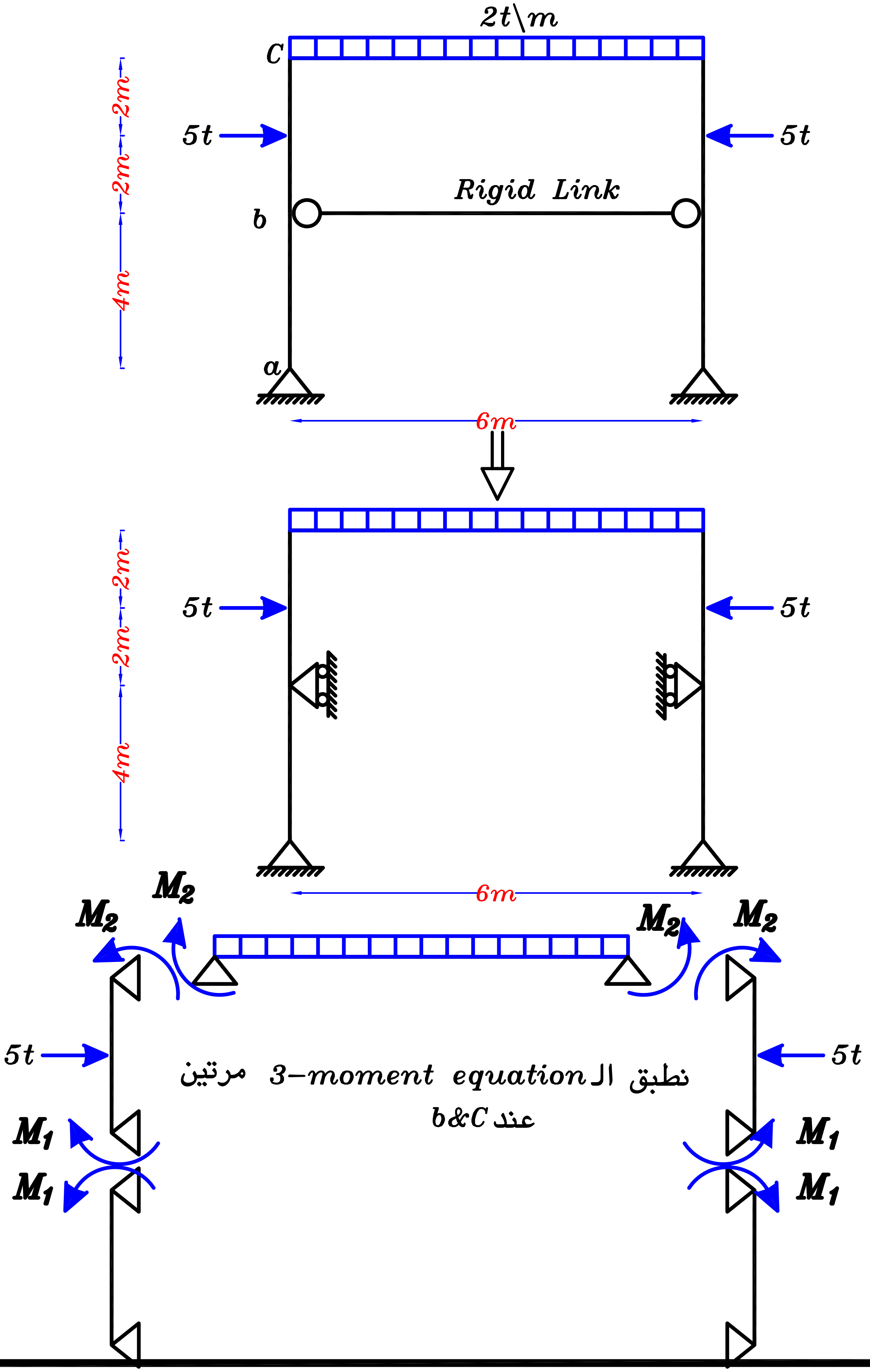
تماثل حول member أو Support

فى هذه الحالة يمكننا وضع Fixed support فى المنتصف على محور التماثل لان فى هذه الحالة النقطة الواقعة فى المنتصف (C) الافقية و الدوران لانها واقعة على محور التماثل و تكون ممنوعة من الحركة الرأسية لوجود member يمنع الحركة الرأسية عندها .

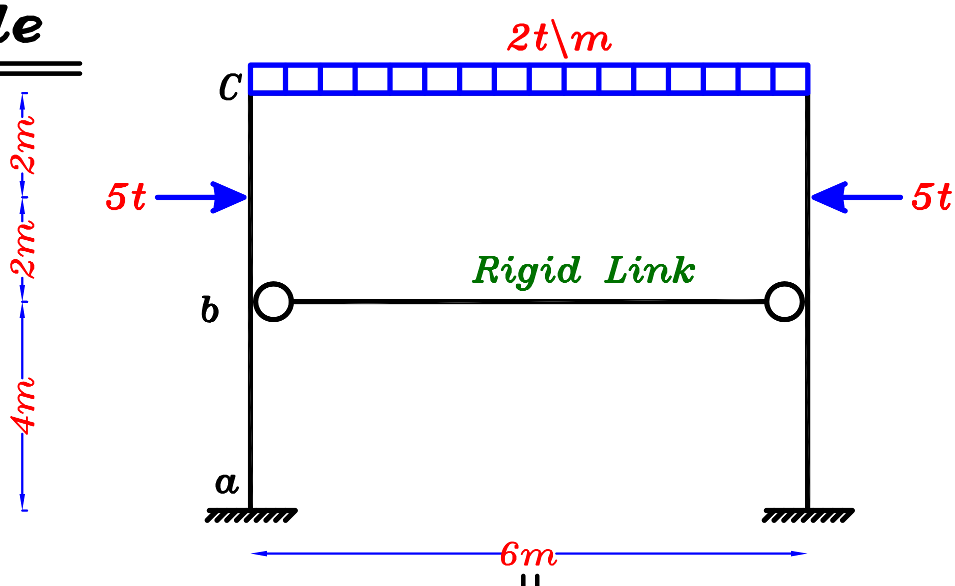




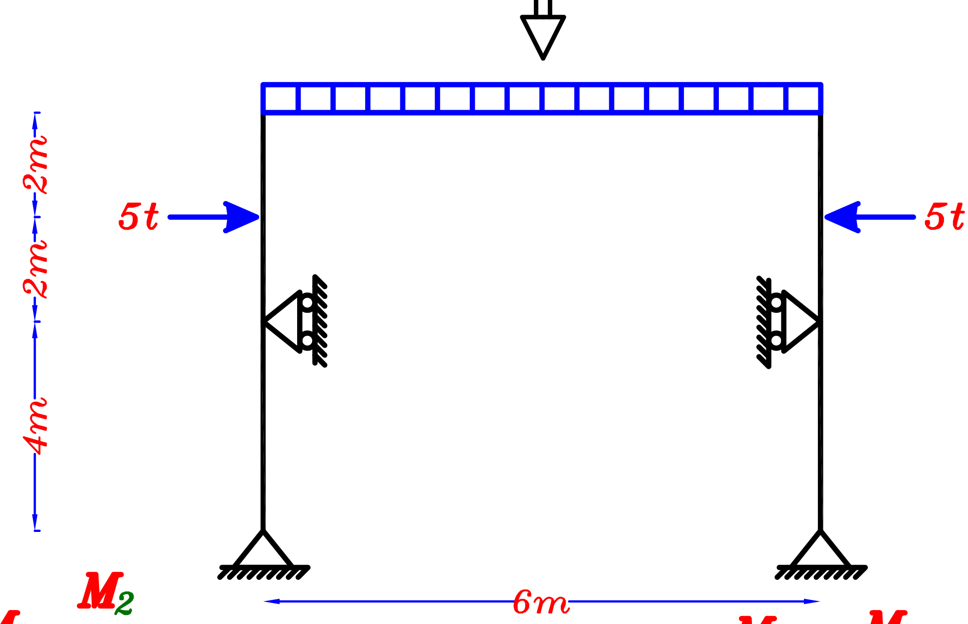
Example


2t\m
C
5t
5t
Rigid Link
b
a
2m
2m
4m
6m
5t
5t
2m
2m
4m
6m
M2
M2
M2
M2
5t
5t
M1
M1
M1
M1
نطبق الـ 3−moment equation مرتين
b&C عند

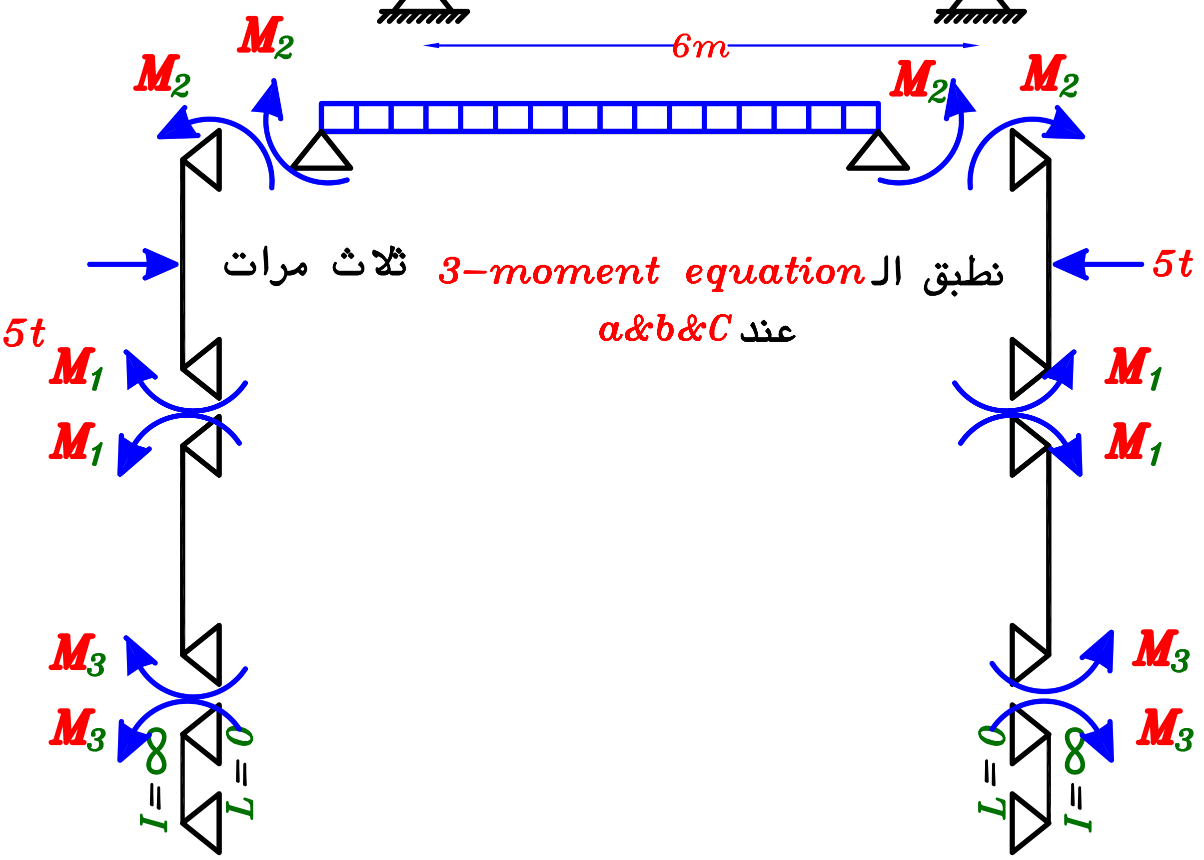
Example



2t\m
C
5t
5t
Rigid Link
b
a
2m
2m
4m
6m

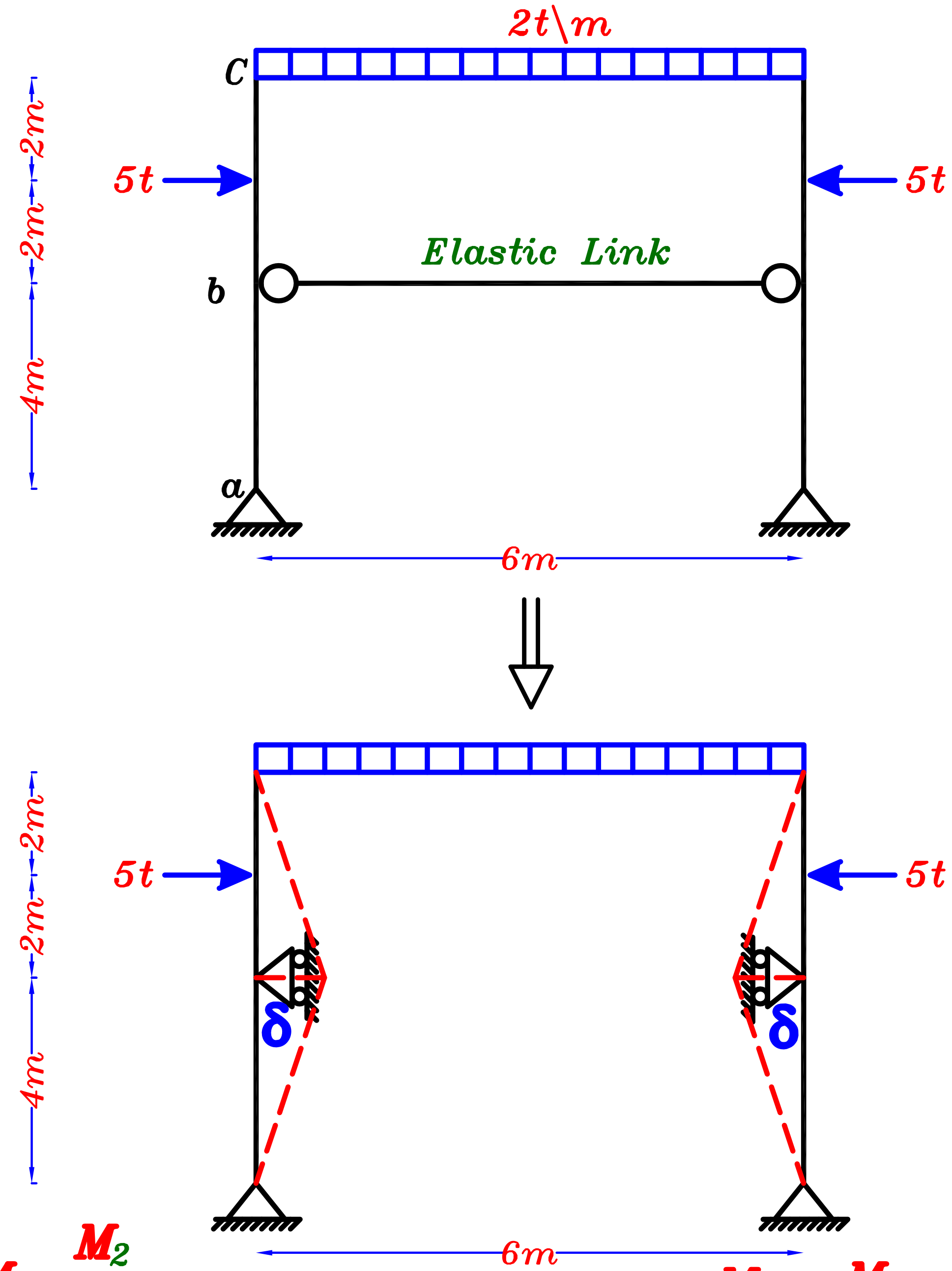


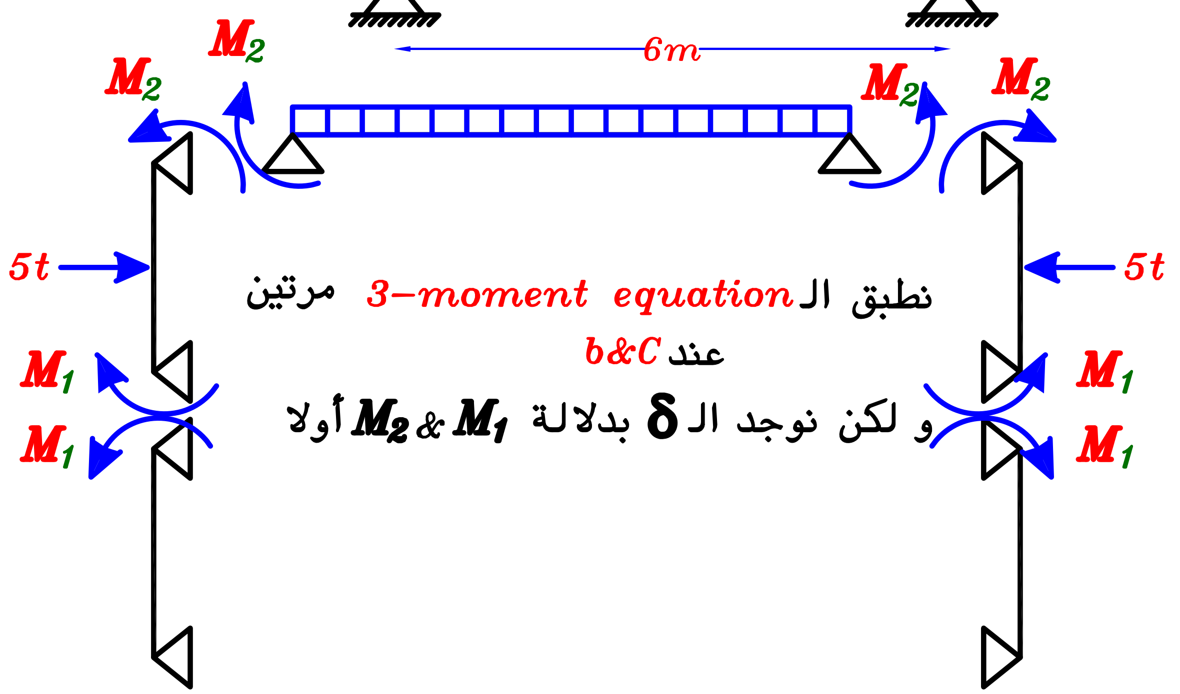
5t
5t
2m
2m
4m
6m



M2
M2
M2
M2
5t
5t
نطبق الـ 3-moment equation ثلاث مرات
عند a&b&C
M1
M1
M1
M1
M3
M3
M3
M3
I = ∞
L = 0
L = 0
I = ∞

Example



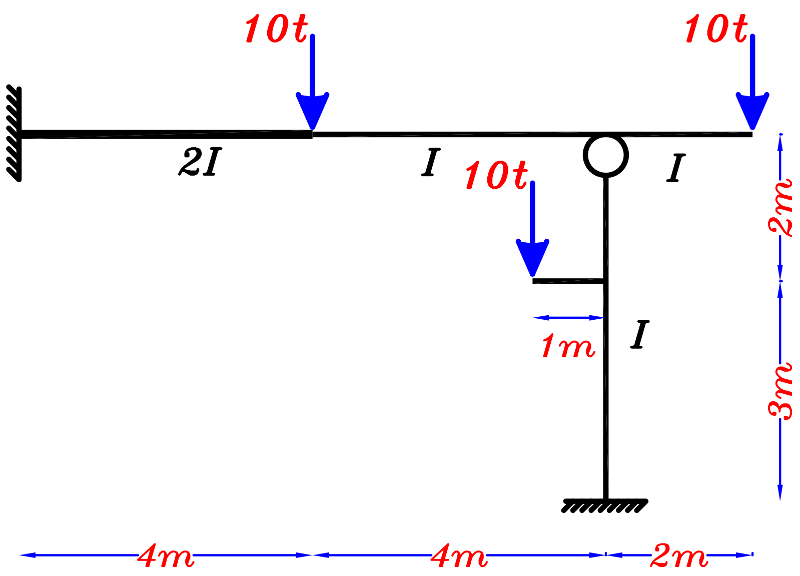


نطبق الـ *3-moment equation* مرتين

عند *b&C*

و لكن نوجد الـ δ بدلالة M_1 & M_2 أولا

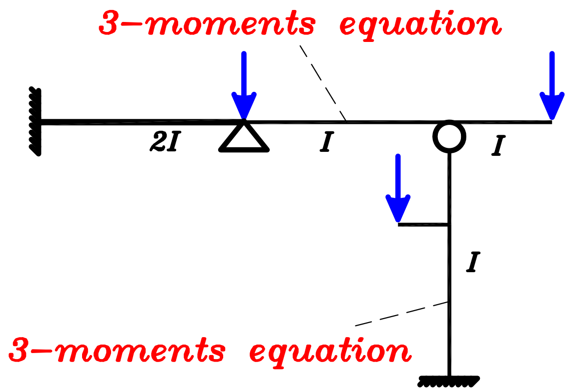
فكرة مهمة

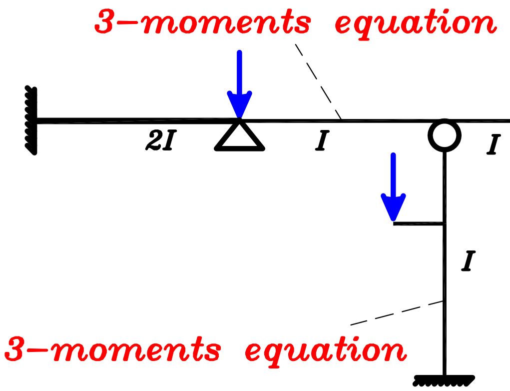


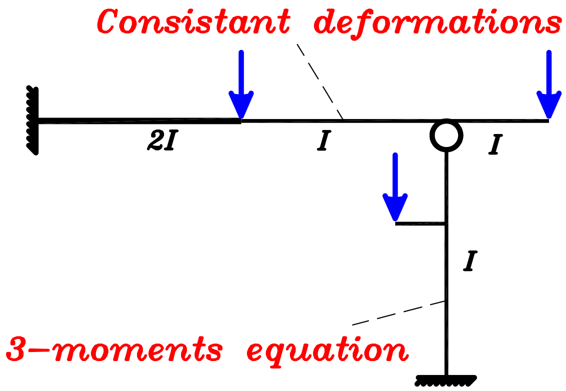
لحل هذا الـ *Frame* سوف نقوم بفصله الى جزئين (الكمرة و العمود) وحل جزء على حدا و حيث أن الكمرة بها تغير فى الـ *Inertia* فى الـ *member* أى فى المسافة بين الـ *2-Supports* فلا يمكن حلها باستخدام طريقة الـ *3-moments equation* و بالتالى نحلها باى طريقة أخرى و ليكن الـ *Consistant deformations* .

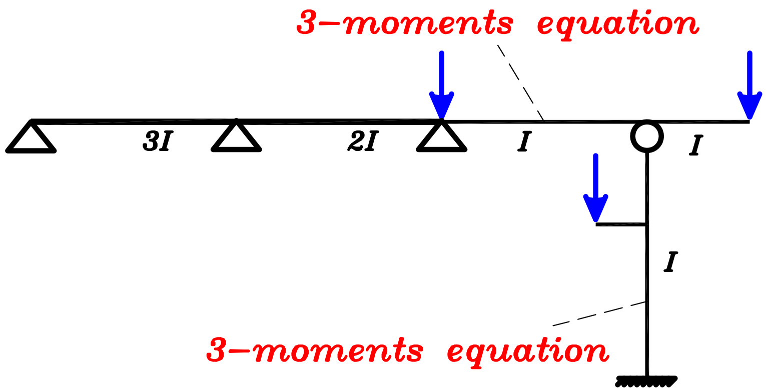
ملحوظة هامة جدا

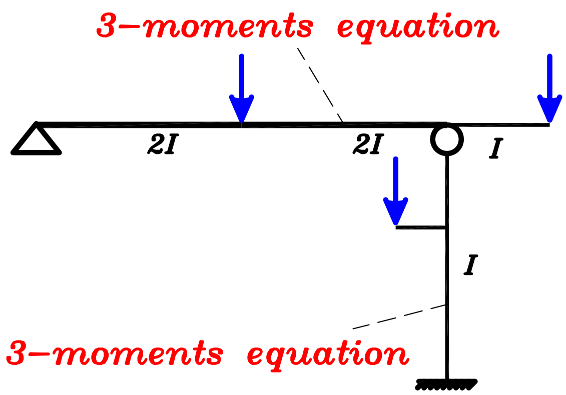
فى هذا الـ *Frame* لو وجد *Support* عند النقطة التى يحدث عندها تغير فى الـ *Inertia* كان من الممكن حله باستخدام الـ *3-moments equation* أى أن طريقة الـ *3-moments equation* تشترط أن يكون الـ *member* من الـ *Support* الى الـ *Support* له *Inertia* ثابتة .




3−moments equation
2I
I
I
I
3−moments equation

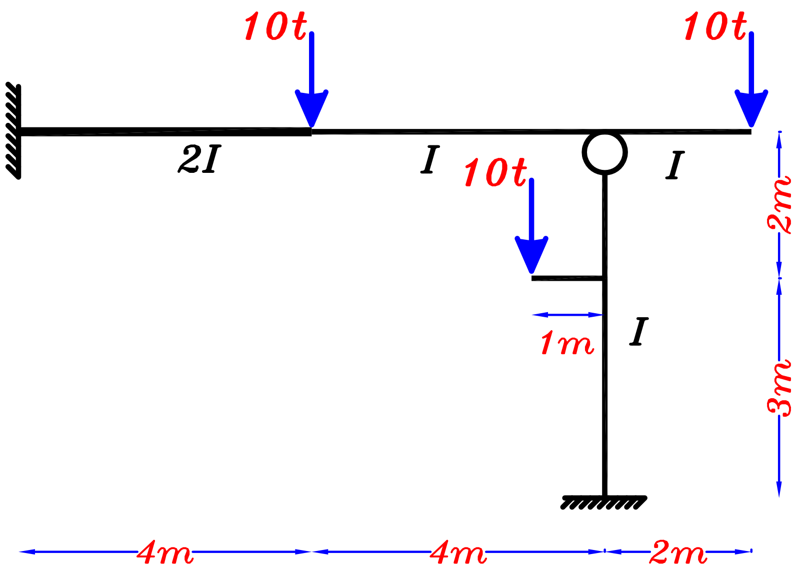

Consistant deformations
2I
I
I
I
3−moments equation


3−moments equation
3I
2I
I
I
I
3−moments equation


3−moments equation
2I
2I
I
I
3−moments equation

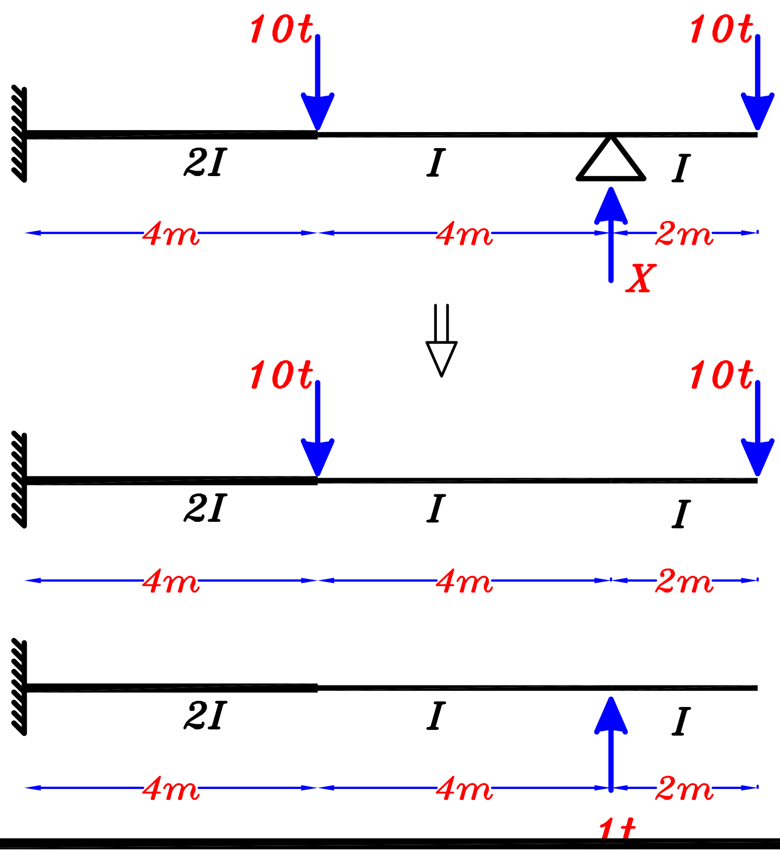
Example

For the shown frame draw the B.M.D & S.F.D .



لحل هذا الـ *Frame* سوف نقوم بفصله الى جزئين (الكمرة و العمود) وحل جزء على حدا و حيث أن الكمرة بها تغير فى الـ *Inertia* فى الـ *member* أى فى المسافة بين الـ *2−Supports* فلا يمكن حلها باستخدام طريقة الـ *3−moments equation* و بالتالى نحلها باى طريقة أخرى و ليكن الـ *Consistant deformations* .

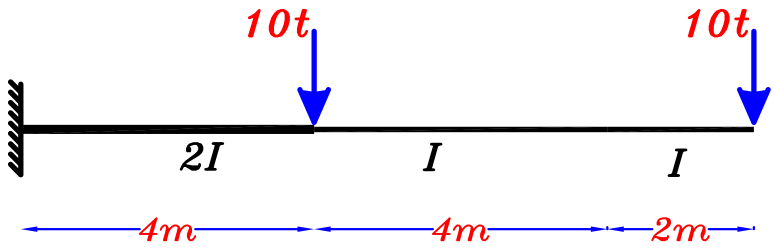
Part (1)



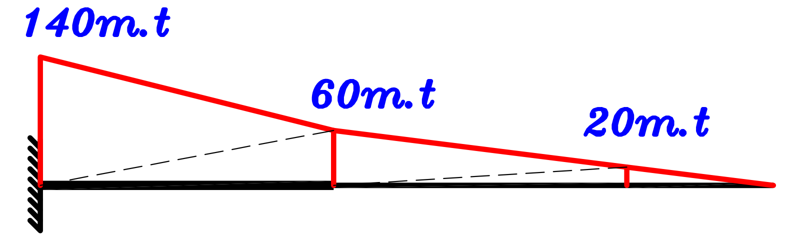
Main system(0)

Correction system(1)

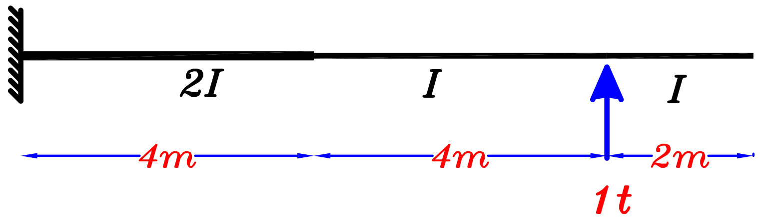
$x \quad X$



Main system(0)

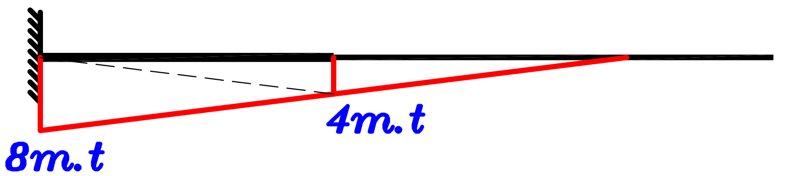


M_0



Correction system(1)

x X



$$\delta_{10} = \int \frac{M_1\, M_0}{EI}\, dL$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{2EI}\left[(1/2x4x140)(-2/3x8-1/3x4) + (1/2x4x60)(-2/3x8-1/3x4)\right] + \frac{1}{EI}\left[(1/2x4x60)(-2/3x4) + (1/2x4x20)(-1/3x4)\right] = \frac{-1626.67}{EI}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1\, M_1}{EI}\, dL$$

$$= \frac{1}{2EI}\left[(1/2x4x8)(2/3x8+1/3x4)+(1/2x4x4)(2/3x4+1/3x8)\right] + \frac{1}{EI}\left[(1/2x4x4)(2/3x4)\right] = \frac{96}{EI}$$

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} \times X_1$$

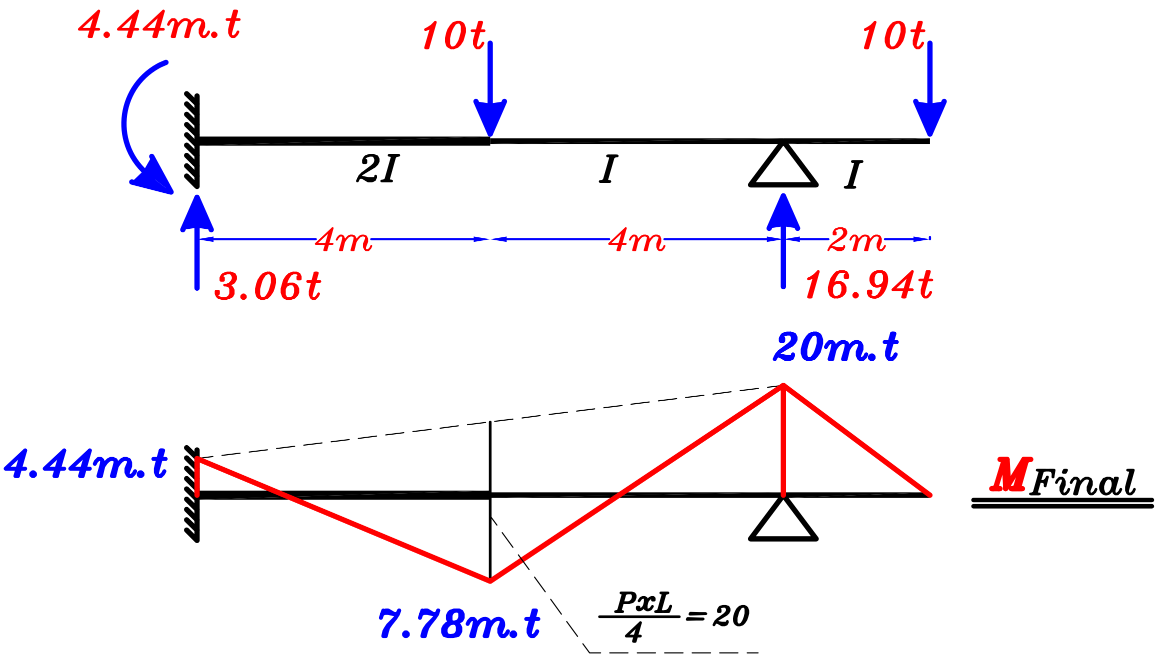
$$0 = \frac{-1626.67}{EI} + \frac{96}{EI} \times X_1 \Longrightarrow \boxed{X_1 = 16.94t}$$

$M_{final} = M_0 + (X_1) M_1$

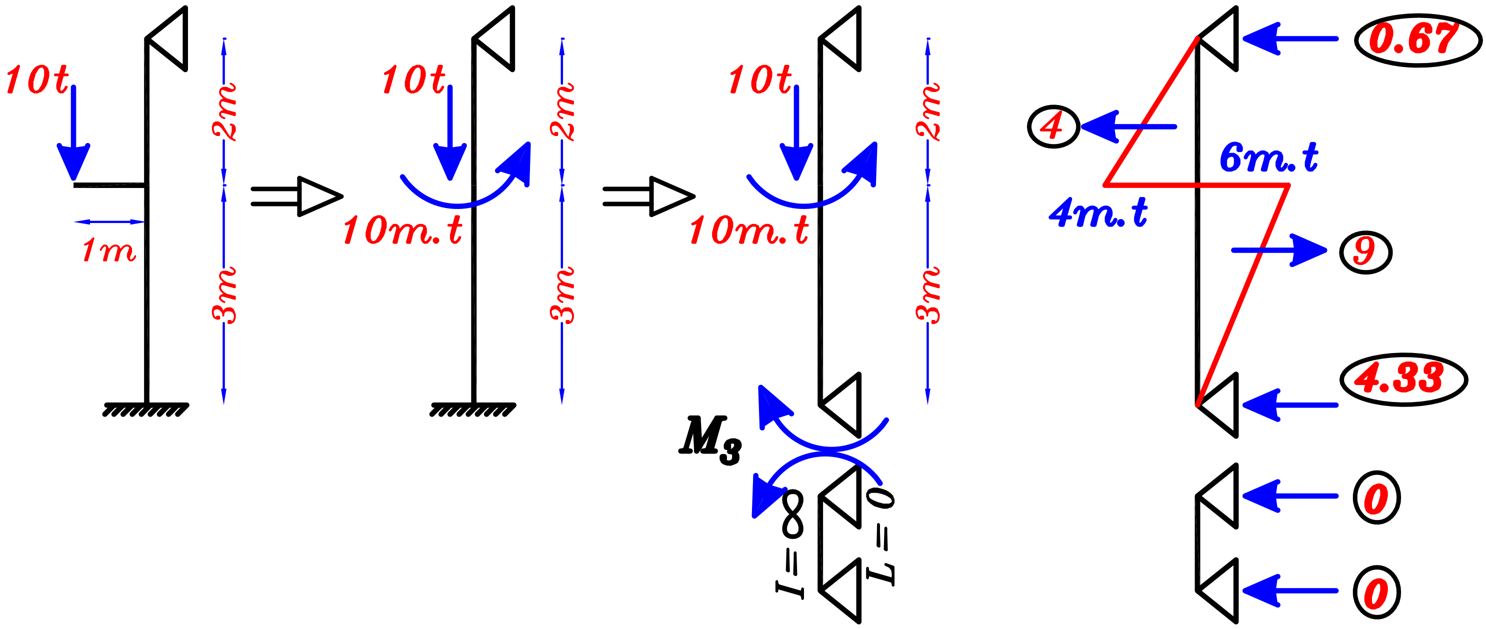
$$M_{final} = M_0 + (16.94) M_1$$

$R_{final} = R_0 + (X_1) R_1$

$$R_{final} = R_0 + (16.94) R_1$$



Part (2)

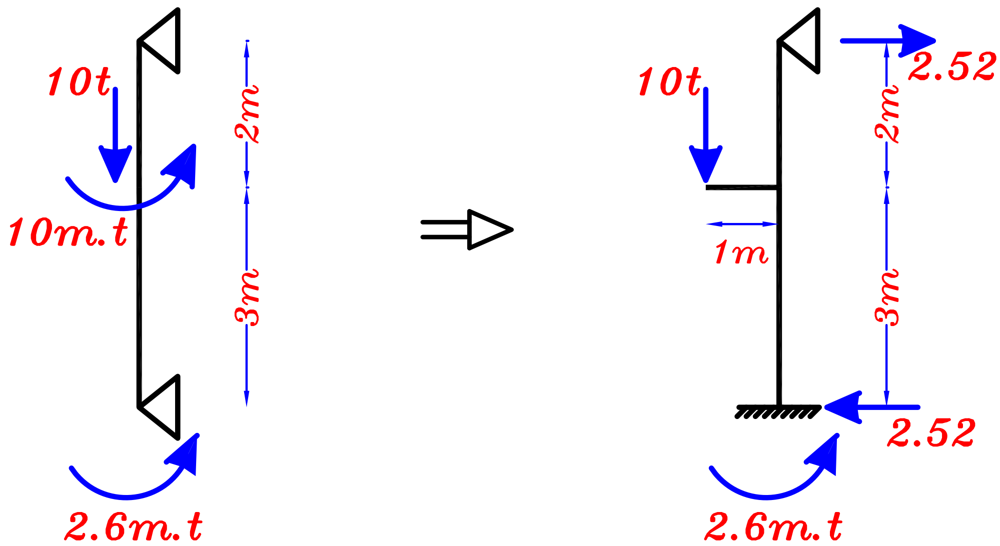


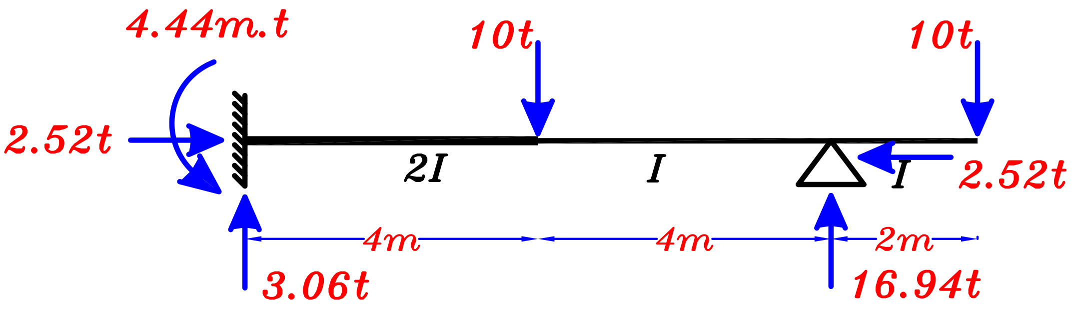
ELASTIC LOADS

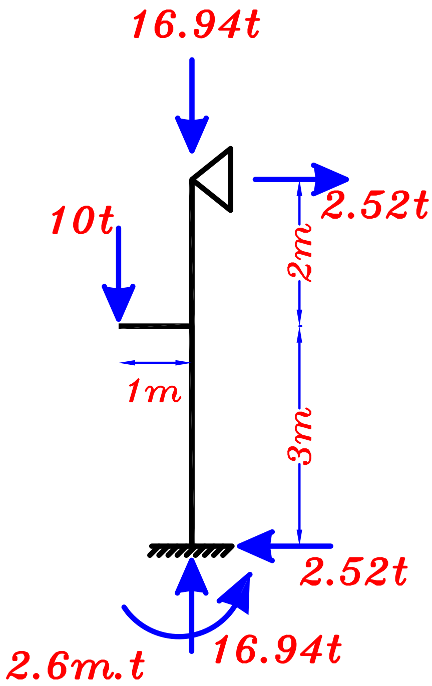
Equation of three moment at joint (3)

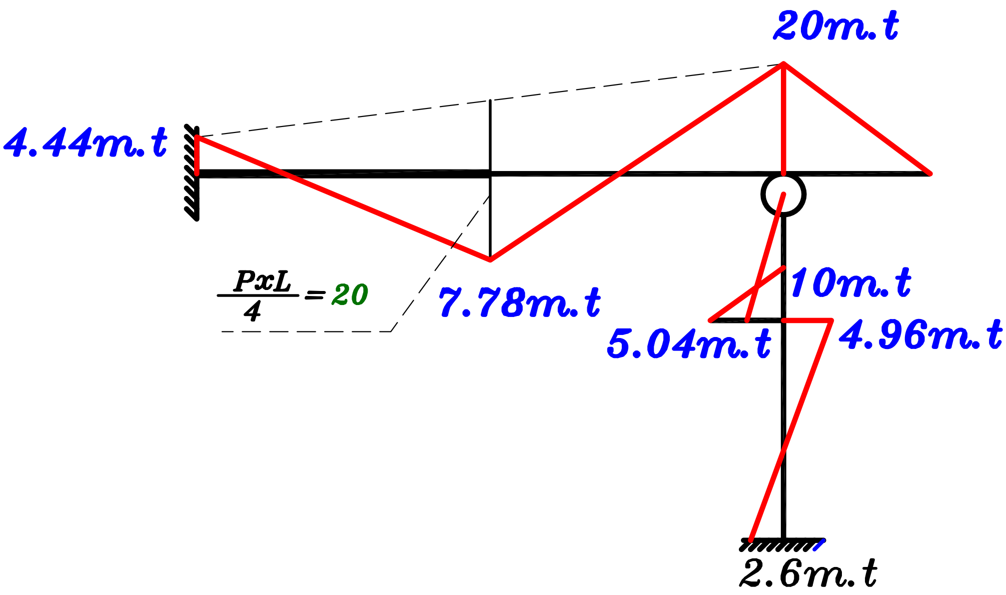
$$2M_3\,(\,5\,) = -6\,(\,4.33\,)$$

$$\boxed{M_3 = -2.60 m.t}$$

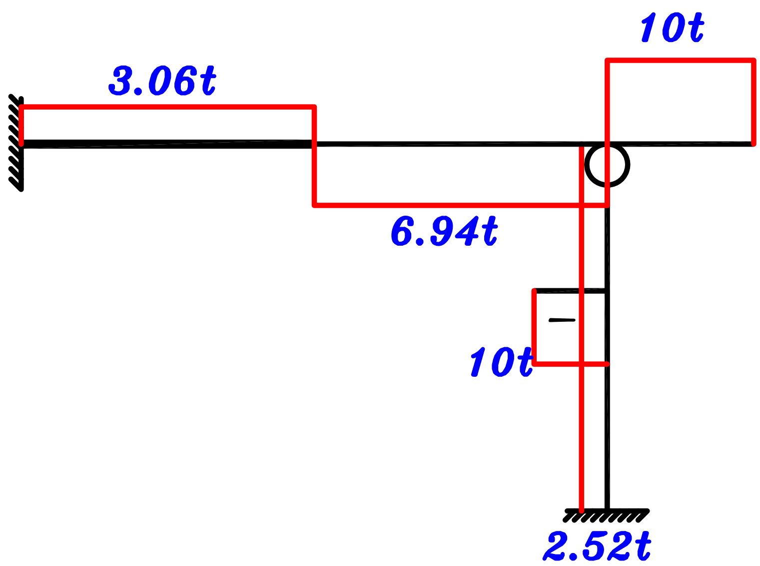



4.44m.t
10t
10t
2.52t
2I
I
I
2.52t
4m
4m
2m
3.06t
16.94t


16.94t
10t
2.52t
2m
1m
3m
2.52t
2.6m.t
16.94t

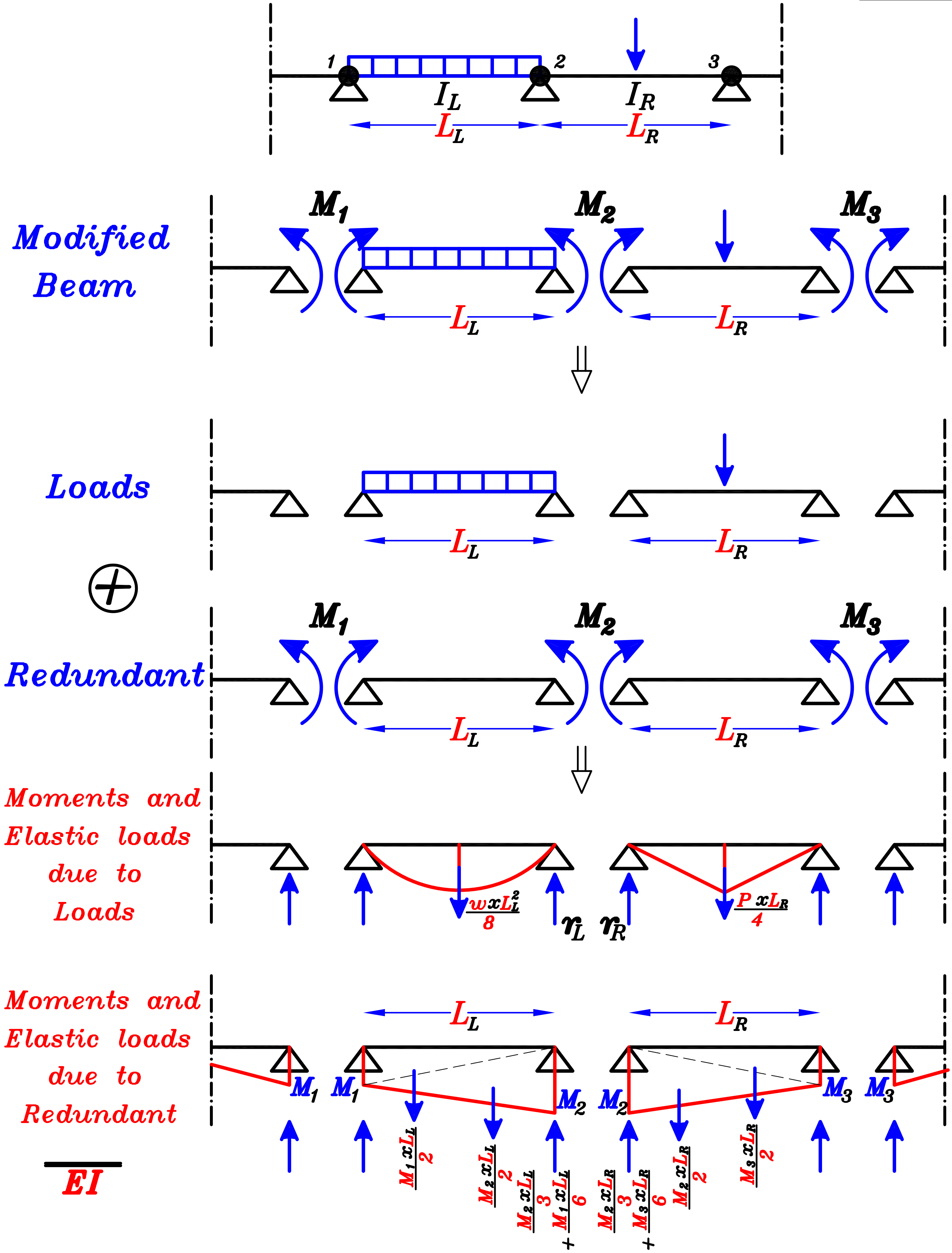

20m.t
4.44m.t
$\frac{PxL}{4}=20$
7.78m.t
10m.t
5.04m.t
4.96m.t
2.6m.t

B.M.D


10t
3.06t
6.94t
—
10t
2.52t

S.F.D

THREE MOMENTS EQUATION اثبات



و حيث انه عند نقطة (2) تكون ال *Slope angle* من اليمين تساوى ال *Slope angle* من اليسار

لاننا نحسب من اليمين

$$\alpha_{2\,Left} = -\Big[\underbrace{r_L}_{\text{due to loads}} + \underbrace{\frac{M_2\, xL_L}{3} + \frac{M_1\, xL_L}{6}}_{\text{due to redundant}}\Big] * \frac{1}{EI_L}$$

$$\alpha_{2\,right} = \Big[\underbrace{r_R}_{\text{due to loads}} + \underbrace{\frac{M_2\, xL_R}{3} + \frac{M_3\, xL_R}{6}}_{\text{due to redundant}}\Big] * \frac{1}{EI_R}$$

$$\alpha_{2\,Left} = \alpha_{2\,right}$$

$$-\Big[r_L + \frac{M_2\, xL_L}{3} + \frac{M_1\, xL_L}{6}\Big] * \frac{1}{EI_L} = \Big[r_R + \frac{M_2\, xL_R}{3} + \frac{M_3\, xL_R}{6}\Big] * \frac{1}{EI_R}$$

$$\boxed{M_1 \frac{L_L}{EI_L} + 2M_2\left(\frac{L_L}{EI_L} + \frac{L_R}{EI_R}\right) + M_3 \frac{L_R}{EI_R} = -6\left(\frac{r_L}{EI_L} + \frac{r_R}{EI_R}\right)}$$