Conjugate Beam Method
طريقة الكمرة التخيلية

نسألكم الدعاء

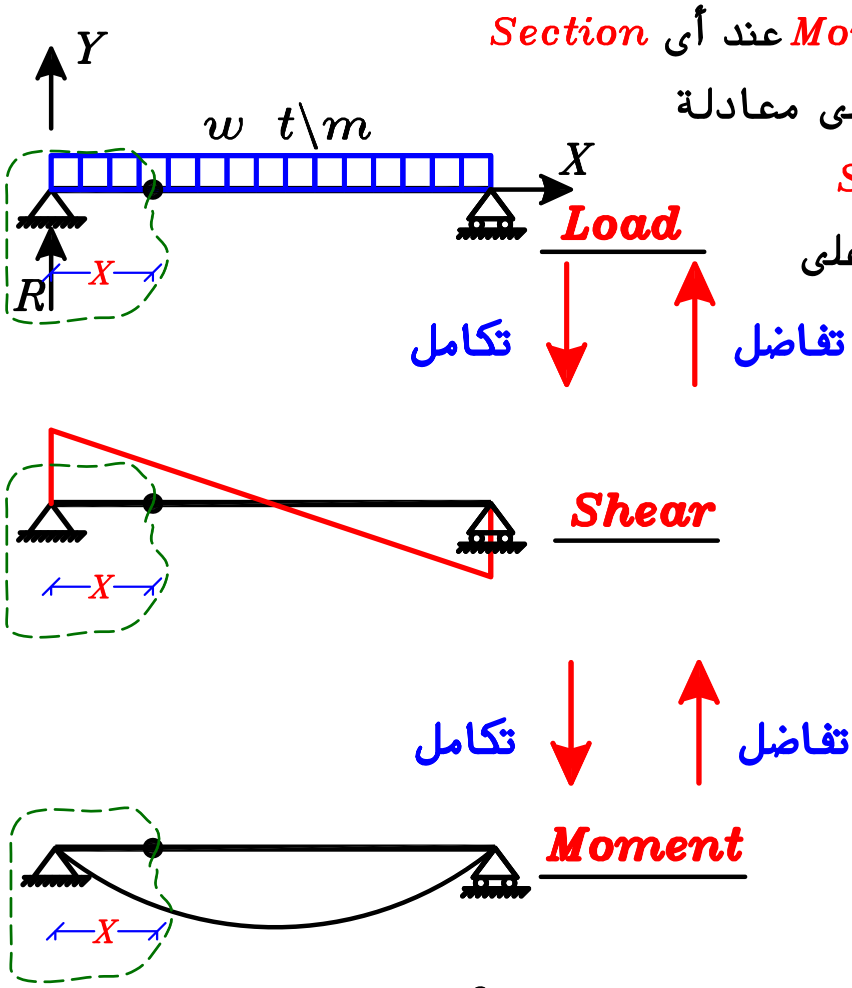
Table of Contents

Conjugate Beam

هى أحد طرق حساب ال *Deflection* و تعتمد هذه الطريقة على تحويل الكمرة المراد حساب ال *Deflection* أو ال *Slope angle* لها الى كمرة تخيلية تسمى ال *Conjugate Beam* و هذه الكمرة التخيلية عند حساب ال *Shear Force* عند أى نقطة فيها تكون قيمته مساوية لقيمة ال *Slope angle* عند نفس النقطة فى الكمرة الاصلية ، و عند حساب ال *Bending Moment* فى الكمرة التخيلية عند أى نقطة تكون قيمته مساوية للـ *Deflection* عند نفس النقطة فى الكمرة الاصلية .

و لفهم فكرة الموضوع نحتاج الى مراجعة معلومة مهمة من سنة أولى

عند كتابة معادلة ال *Moment* عند أى *Section* فان تفاضل هذه المعادلة يعطى معادلة ال *Shear* عند هذا ال *Section* و بتفاضلها مرة أخرى نحصل على ال *Load* .

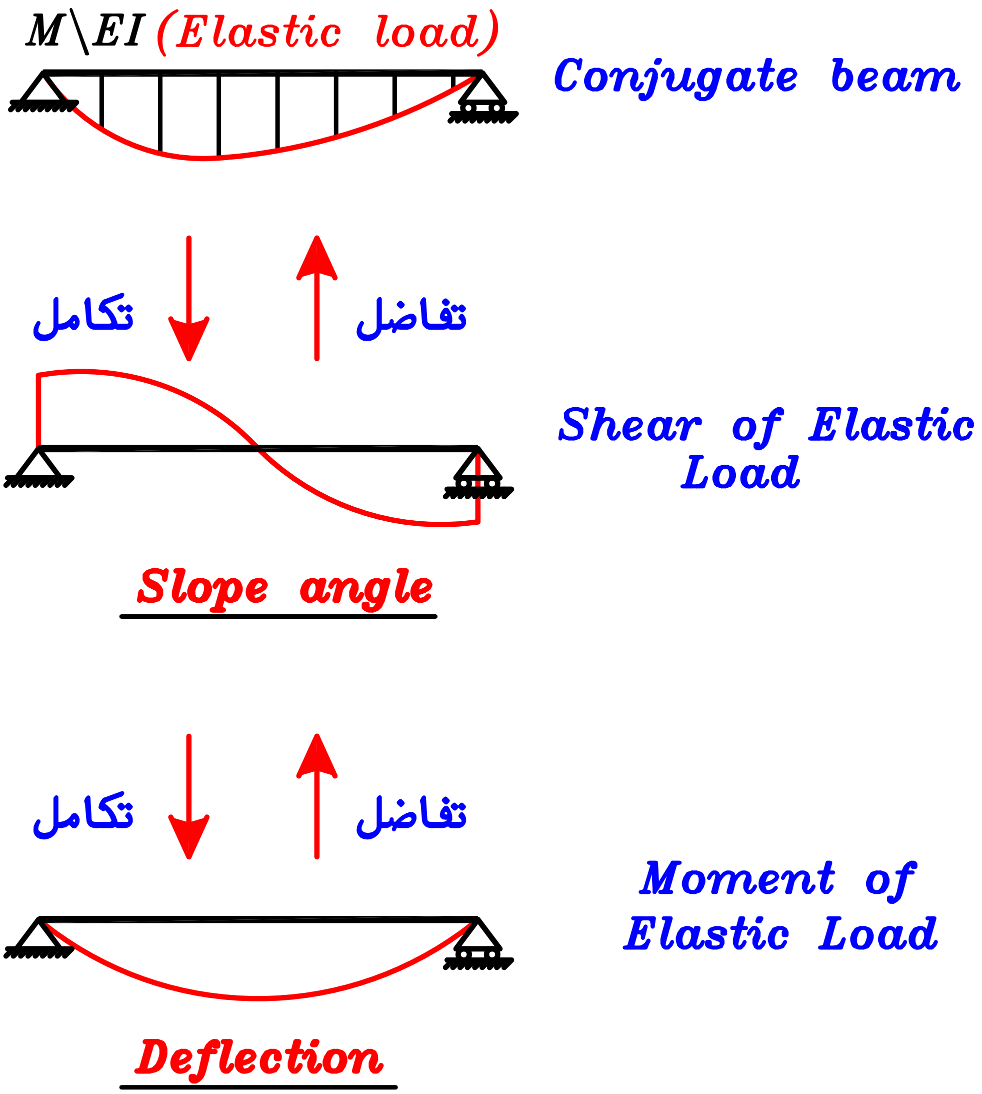


* $M(x) = R \times X - w \times \frac{X^2}{2}$

* $Shear = \frac{d\,M(x)}{dx} = R - w \times X$

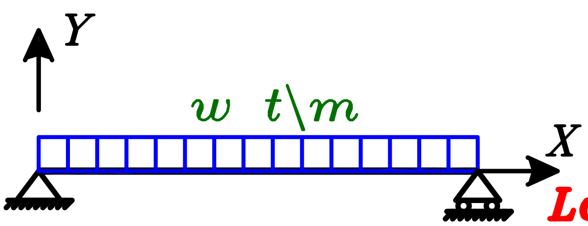
* $Load = \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -w$

سوف نقوم بتحويل الكمرة الاصلية الى كمرة تخيلية و طريقة التحويل سوف نعرفها فيما بعد و يكون ال *Load* الموضوع على الكمرة التخيلية مسمى بال *Elastic Load* و هو يساوى $-M/EI$ و طريقة حسابه سوف نعرفها فيما بعد و لكن اذا كان ال $Load = -M/EI$ أى أنه يساوى ال $Curvature = Y''$ و بالتكامل نحصل على ال $Slope\ angle = Y'$ و حيث أن تكامل ال *Load* يعطى ال*Shear* فان ال*Shear* للكمرة التخيلية يكون هو ال $Slope\ angle = Y'$.
ثم بالتكامل مرة أخرى نحصل على ال $Deflection = Y$ و حيث أنه بتكامل ال *Shear* نحصل على ال *moment* فان ال *moment* للكمرة التخيلية يكون هو ال $Deflection = Y$.



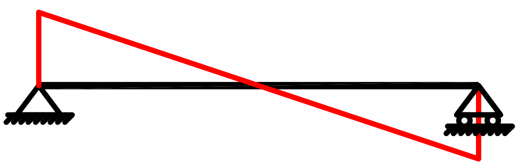
ORIGINAL BEAM

* $Load = \dfrac{d^2 M(x)}{dx^2}$
* $Shear = \dfrac{d\,M(x)}{dx}$
* $Moment = M$



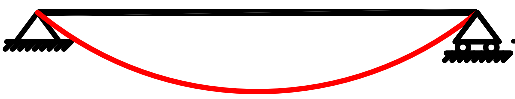
Load

تكامل ↓ ↑ تفاضل



Shear

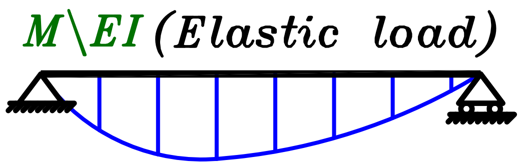
تكامل ↓ ↑ تفاضل



Moment

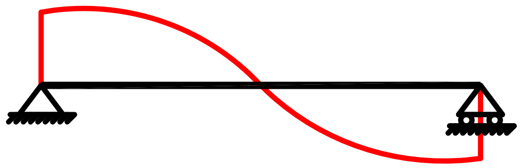
CONJUGATE BEAM

* $Elastic\ load = \dfrac{d^2 (y)}{dx^2} = -\dfrac{M}{EI}$
* $Slope\ angle = \dfrac{d\,(y)}{dx}$
* $Deflection = Y$



Conjugate beam

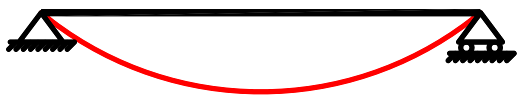
تكامل ↓ ↑ تفاضل



Slope angle

Shear of Elastic Load

تكامل ↓ ↑ تفاضل



Deflection

Moment of Elastic Load

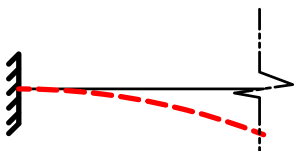
اذا تم حساب الـ (S.F.D) عند أى قطاع فى الـ (conjugate beam) يكون هو الـ (slope angle) عند نفس القطاع فى الكمرة الاصلية .

اذا تم حساب الـ (B.M.D) عند أى قطاع فى الـ (conjugate beam) يكون هو الـ (deflection) عند نفس القطاع فى الكمرة الاصلية .

و لتحويل الكمرة الاصلية الى الـ (conjugate beam) يتم تغيير شكل الـ (Supports) بحيث تحقق متطلبات الـ (conjugate beam) و هى أن العزوم عند أى (Supports) يكون هو الـ (deflection) عند نفس الـ (Supports) فى الكمرة الاصلية و كذلك الـ (Shear) عند أى (Supports) يكون هو الـ (slope angle) عند نفس الـ (Supports) فى الكمرة الاصلية كما هو موضح بالصفحة القادمة .

مثلا

Fixation

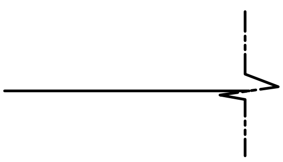

$y = 0$
$\alpha = 0$

فى حالة وجود Fixation فى الكمرة الاصلية فهذا معناه أن

١- الـ deflection فى الكمرة الاصلية يساوى صفر عند هذا الـ Support و لذلك نحتاج Support فى الكمرة التخيلية يكون عنده الـ Moment يساوى صفر حيث أن الـ Moment فى الكمرة التخيلية هو الـ deflection فى الكمرة الاصلية .

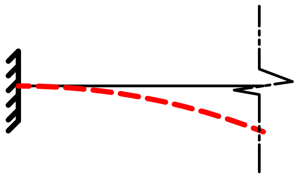
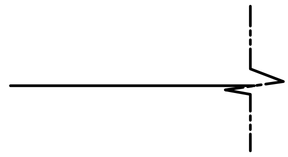
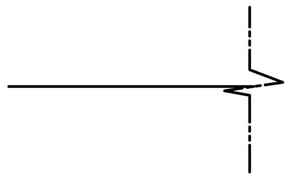
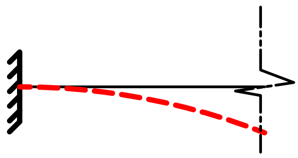
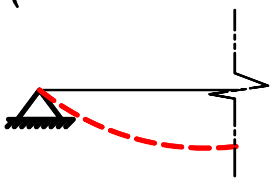
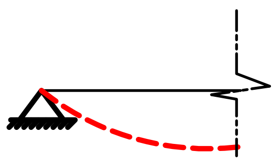
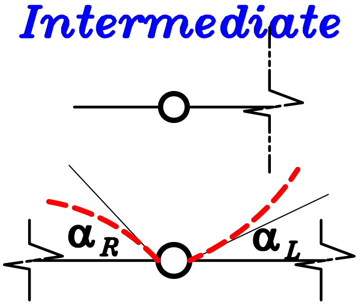
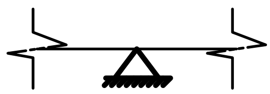
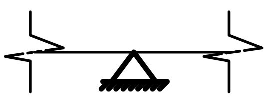
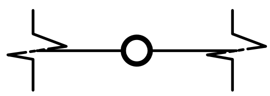
٢- الـ Slope angle فى الكمرة الاصلية يساوى صفر عند هذا الـ Support و لذلك نحتاج Support فى الكمرة التخيلية يكون عنده الـ Shear يساوى صفر حيث أن الـ Shear فى الكمرة التخيلية هو الـ Slope angle فى الكمرة الاصلية و لذلك يتم تحويل الـ Fixation الى Free point .

Free end


$B.M. = 0$
$Shear = 0$

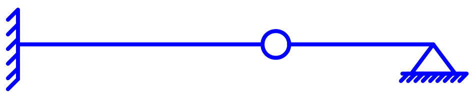
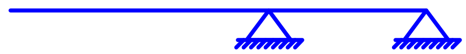
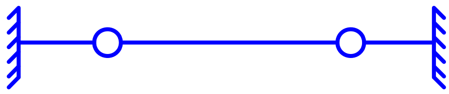
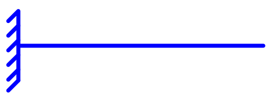
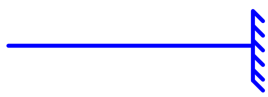
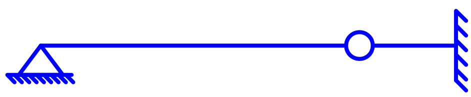
تحويل ال SUPPORTS

ORIGINAL BEAM $\Longrightarrow$ CONJUGATE BEAM

Original Beam	Conjugate Beam
Fixation  $y = 0$ $\alpha = 0$	**Free end**  $B.M. = 0$ $Shear = 0$
Free end  $y \neq 0$ $\alpha \neq 0$	**Fixation**  $B.M. \neq 0$ $Shear \neq 0$
End Support (roller or hinge)  $y = 0$ $\alpha \neq 0$	**End Support**  $B.M. = 0$ $Shear \neq 0$
Intermediate Hinge  $y \neq 0$ $\alpha \neq 0$ $\alpha_L \neq \alpha_R$	**Intermediate Support**  $B.M. \neq 0$ $Shear \neq 0$ relative slope $Q_L \neq Q_R$
Intermediate Support  $y = 0$ $\alpha \neq 0$	**Intermediate Hinge**  $B.M. = 0$ $Shear \neq 0$

Examples

بعض الامثلة لل *Original Beam* و الكمرات ال *Conjugate* المقابلة لها .

Original Beam	Conjugate Beam
	
	
	
	
	

طريقة حساب الـ *Elastic Load*

يتم حساب الـ*Elastic Load* كالاتى

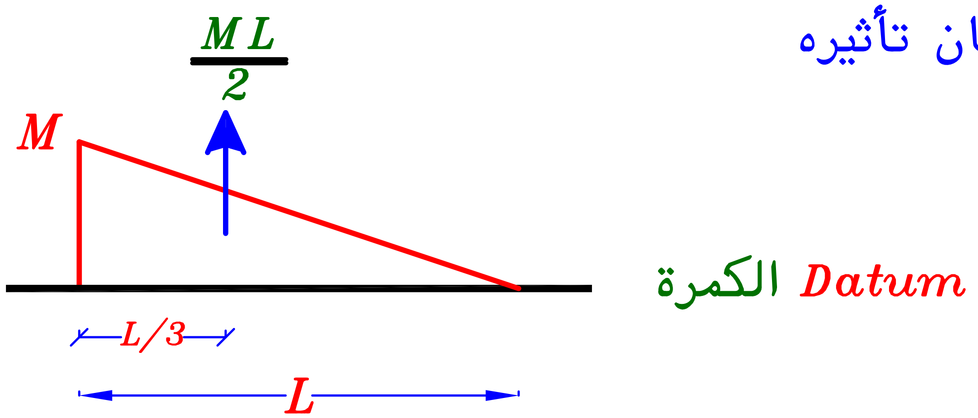
١ - نرسم الـ *B.M.D* للكمرة الاصلية و نقسمه الى مساحات يسهل التعامل معها كما فى الصفحات القادمة .

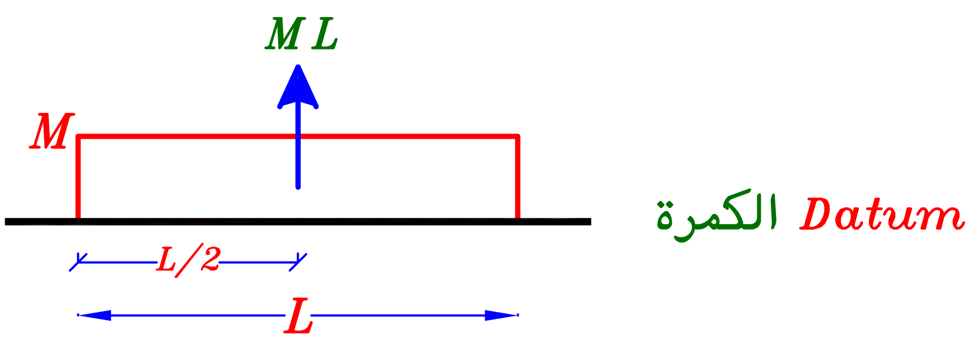
٢ - نحسب مساحة كل جزء من الاجزاء و نقسمها على الـ *EI* الموجود بها هذه المساحة .

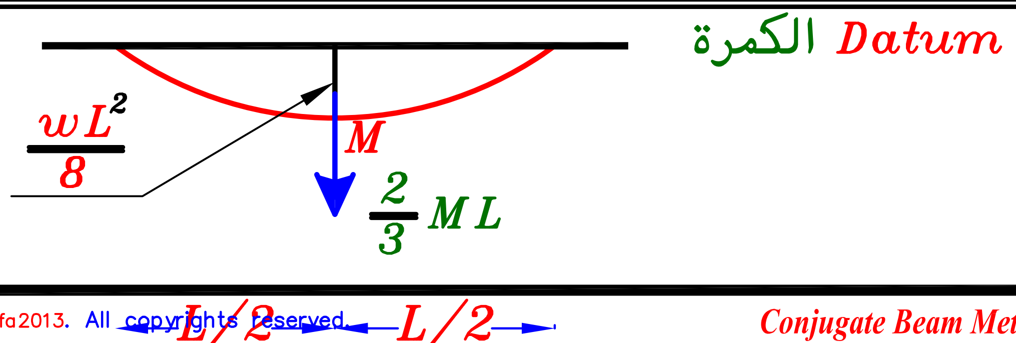
٣ - مكان تأثير كل *Elastic Load* يكون فى *C.g* المساحة الخاصة به .

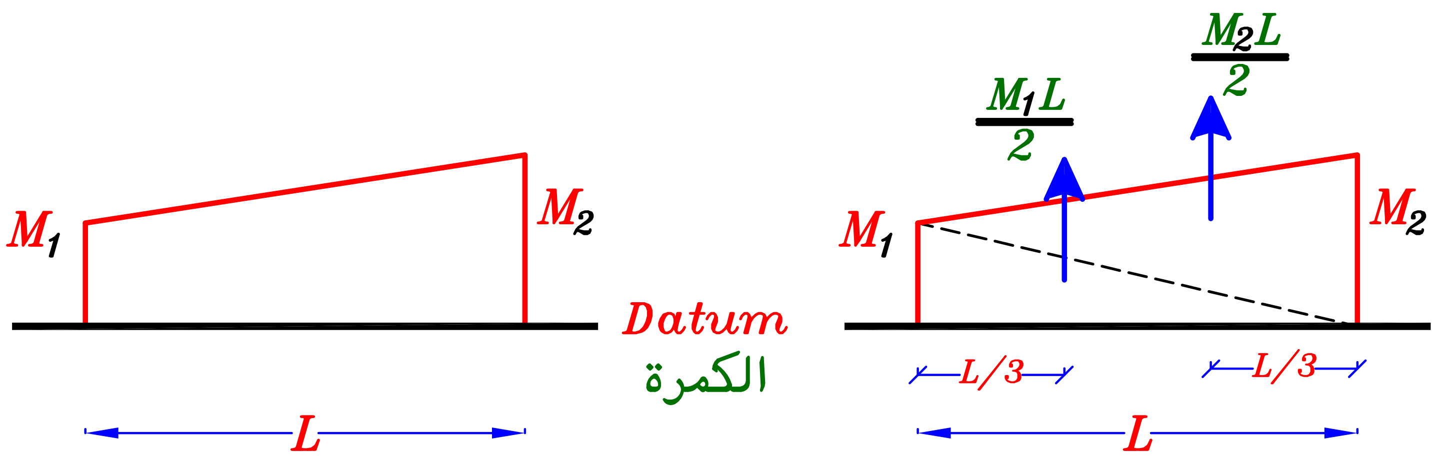
٣ - اتجاه الـ *Elastic Load* يكون حسب اتجاه الـ *B.M.D* فاذا كان الـ *B.M.D* مرسوم فوق الكمرة يكون اتجاه الـ *Elastic Load* لاعلى و اذا كان مرسوم تحت الكمرة يكون اتجاه الـ *Elastic Load* لاسفل .

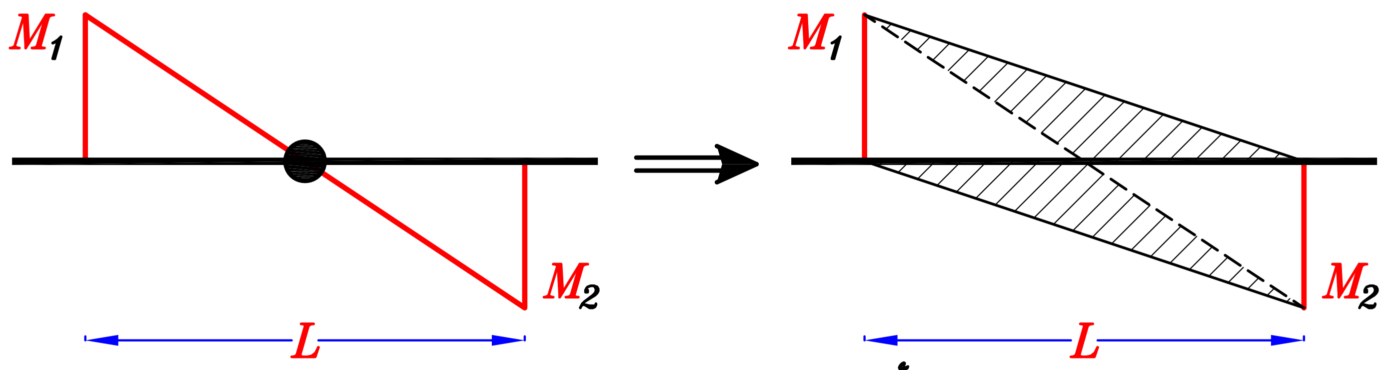
و هذه بعض أشكال الـ*B.M.D* الهامة و الـ *Elastic load* لكل منهم و مكان تأثيره

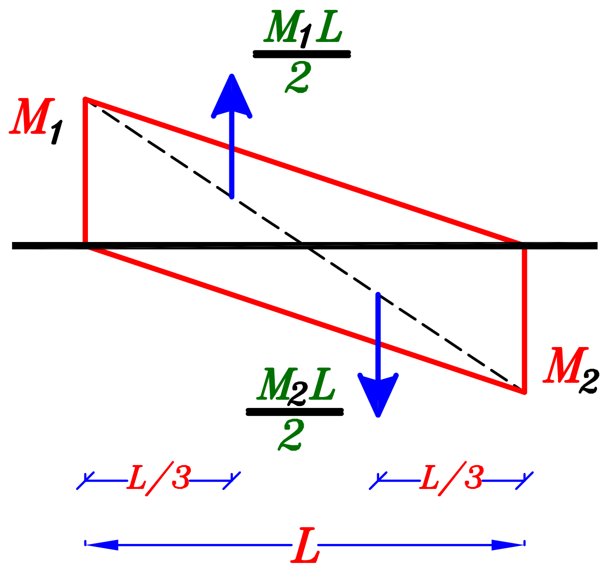




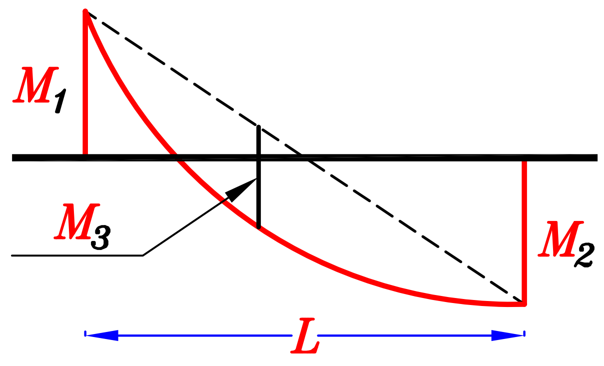


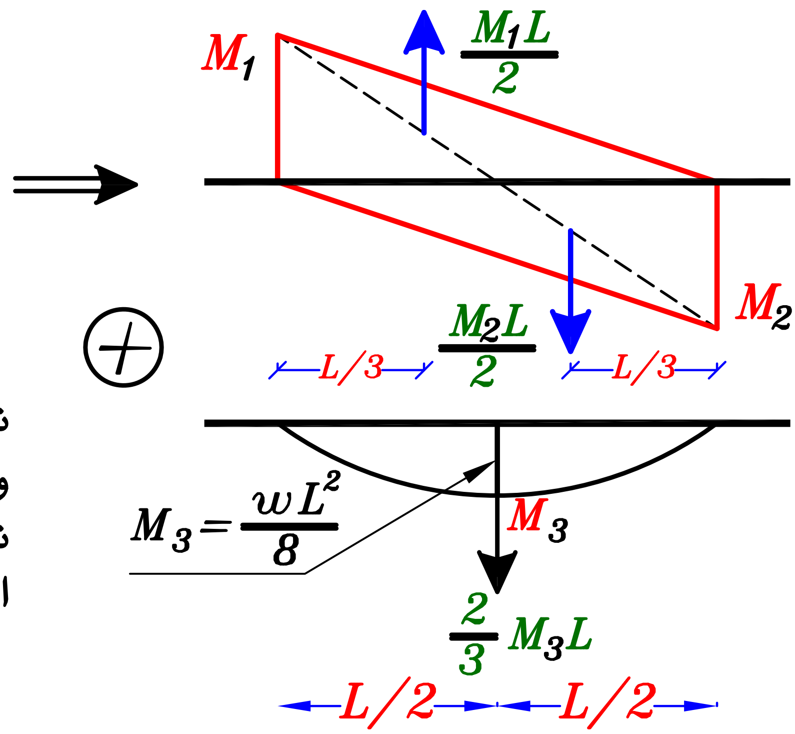




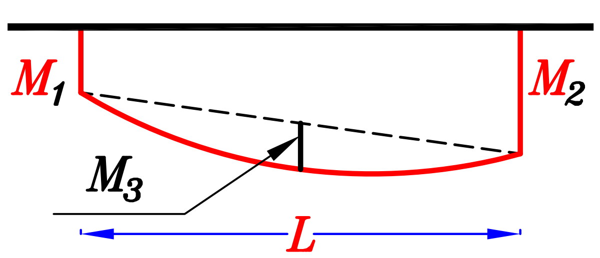


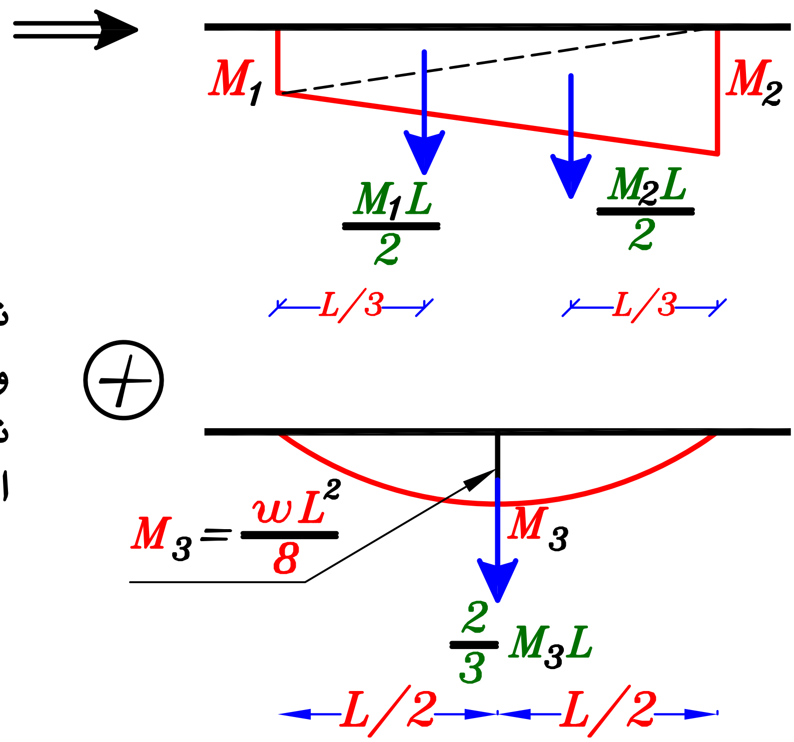
مساحة المثلث اللى زودناه من أعلى
تساوى مساحة المثلث اللى زودناه من
أسفل و هذا أفضل من الحساب على الشكل
الاول حيث فى الشكل الاول نحتاج الى
حساب مكان نقطة الـ*Zero* عن طريق حساب
المثلثات





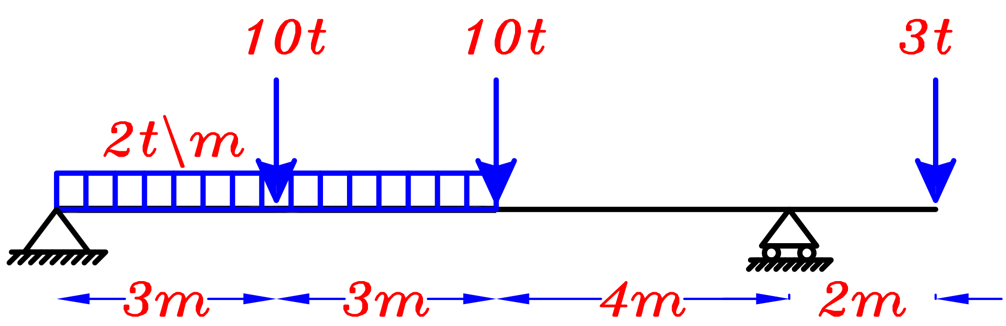
نقسمها الى جزئين المثلثات لوحدها
و الـ*Parabola* لوحدها و دائما
نأخذ الـ*Parabola* موازية لاتجاه
الـ*member*

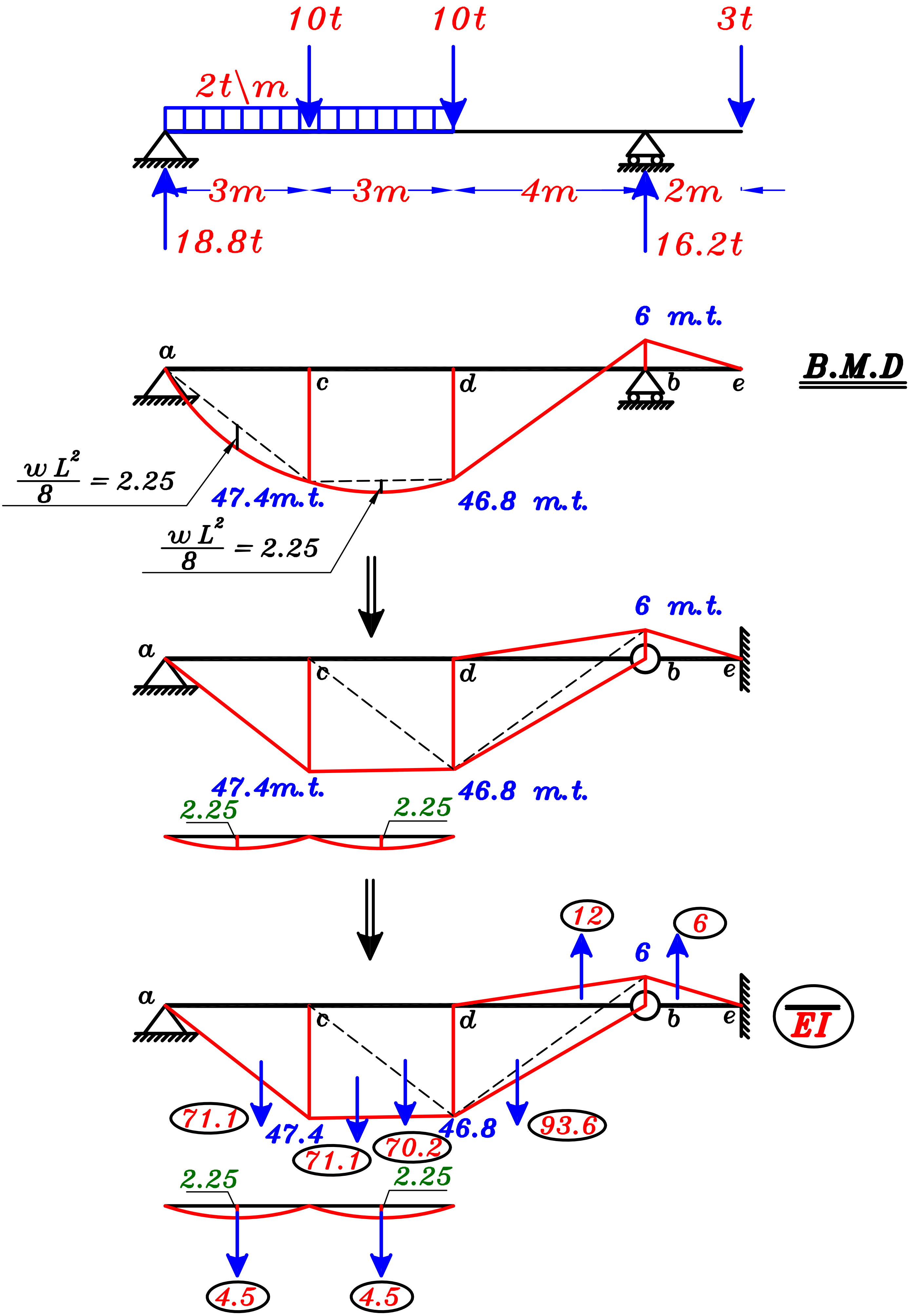




نقسمها الى جزئين المثلثات لوحدها
و الـ*Parabola* لوحدها و دائما
نأخذ الـ*Parabola* موازية لاتجاه
الـ*member*

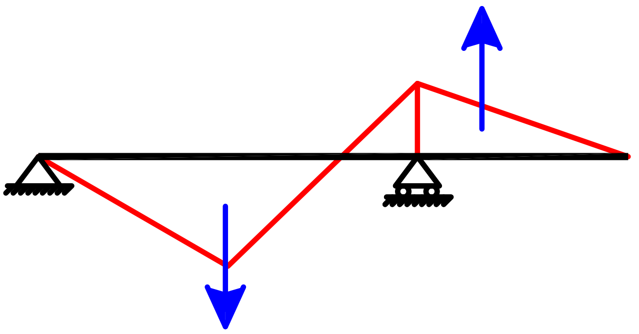
Example:




10t
10t
3t
2t\m
3m
3m
4m
2m
18.8t
16.2t
6 m.t.
a
c
d
b
e
B.M.D
$\frac{wL^2}{8} = 2.25$
47.4m.t.
46.8 m.t.
$\frac{wL^2}{8} = 2.25$
6 m.t.
a
c
d
b
e
47.4m.t.
46.8 m.t.
2.25
2.25
12
6
6
a
c
d
b
e
EI
71.1
47.4
71.1
70.2
46.8
93.6
2.25
2.25
4.5
4.5

SIGN RULE

(1) Elastic Load

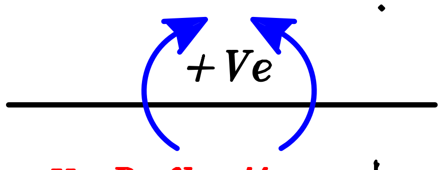


اذا كان الـ *B.M.D* موجب و مرسوم
أسفل الكمرة يعطى *Elastic Load*
يؤثر لاسفل

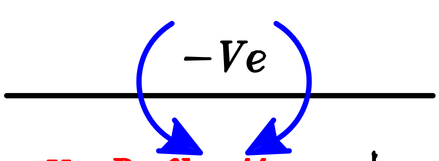
اذا كان الـ *B.M.D* سالب و مرسوم
أعلى الكمرة يعطى *Elastic Load*
يؤثر لاعلى

(2) Deflection

الـ *Deflection* هو الـ *(B.M.D)* لكمرة الـ *Conjugate* لذلك الـ *Deflection* يكون موجب اذا كان الـ *(B.M.D)* فى الكمرة التخيلية موجب و يكون سالب اذا كان الـ *(B.M.D)* فى الكمرة التخيلية سالب .



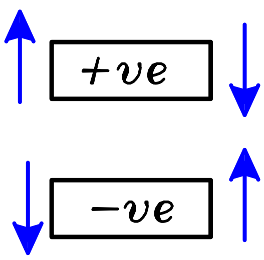
يعطى *+Ve Deflection*
فى الكمرة الاصلية



يعطى *−Ve Deflection*
فى الكمرة الاصلية

(3) Slope angle

الـ *Slope angle* هو الـ *(S.F.D)* لكمرة الـ *Conjugate* لذلك الـ *Slope angle* يكون موجب اذا كان الـ *(S.F.D)* فى الكمرة التخيلية موجب و يكون سالب اذا كان الـ *(S.F.D)* فى الكمرة التخيلية سالب .



يعطى *+Ve Slope angle*
فى الكمرة الاصلية

يعطى *−Ve Slope angle*
فى الكمرة الاصلية

ملاحظات هامة

لحساب الـ *Elastic load* نحتاج الى رسم الـ *B.M.D* و لرسم الـ *B.M.D* نحتاج الى حساب قيم الـ *Moment* عند نقاط معينة و هذه النقاط هى نفسها نقاط تقسيم المساحات أثناء حساب الـ *Elastic load* و هى

١- الحمل المركز	٢- أى *Support*

٣- بداية و نهاية الـ *member*

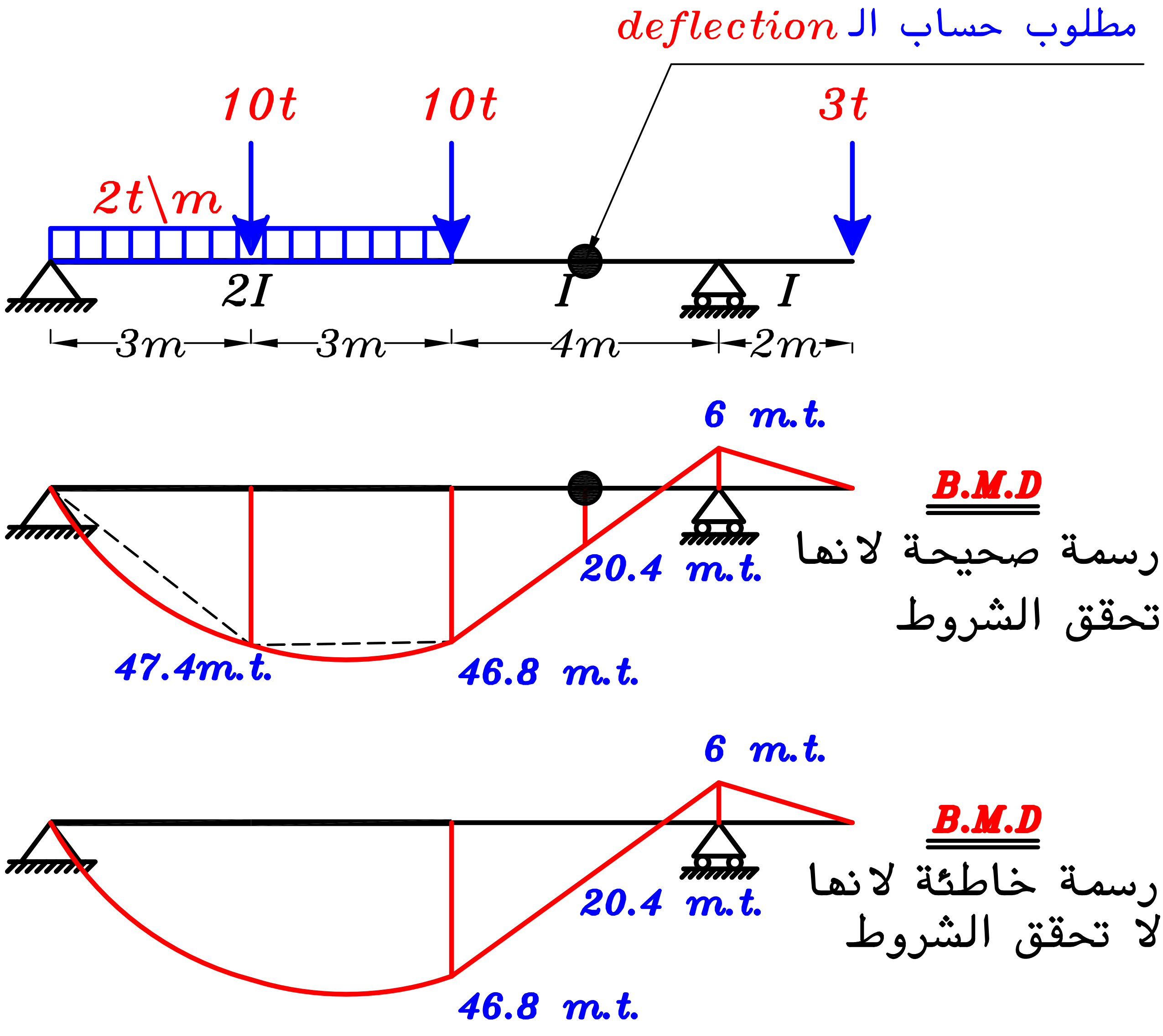
٤- بداية و نهاية الـ *Distributed load*

٥- قبل و بعد الـ *Concentrated moment*

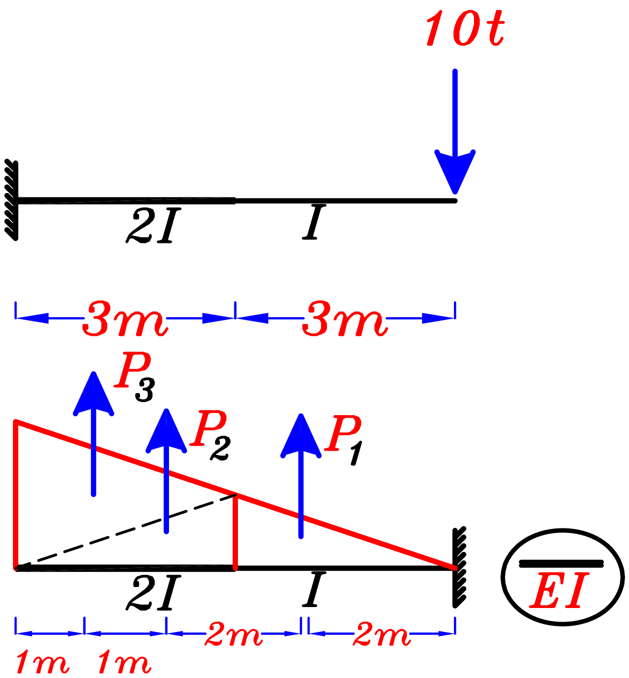
٦- نقط تغير الحمل

٧- نقط تغير الـ *moment of inertia (I)*

٨- النقاط المراد عندها حساب الـ *deflection & Slope angle*



فى حالة وجود تغير فى ال *Inertia* فعند حساب ال *Elastic load* نقسم قيمة ال *Elastic load* على الرقم المضروب فى ال *(I)* لاننا نريد أن يكون كل *Elastic load* فى الكمرة عبارة عن رقم مقسوم على *EI* فقط.



Conjugate Beam

$$P_1 = 0.5 * 3 * 30 = 45$$

$$P_2 = 0.5 * 3 * \frac{30}{2} = 22.5$$

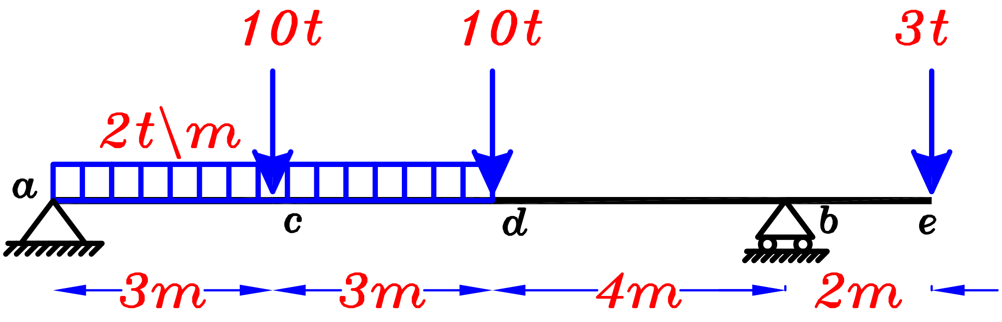
$$P_3 = 0.5 * 3 * \frac{60}{2} = 45$$

خطوات الحل

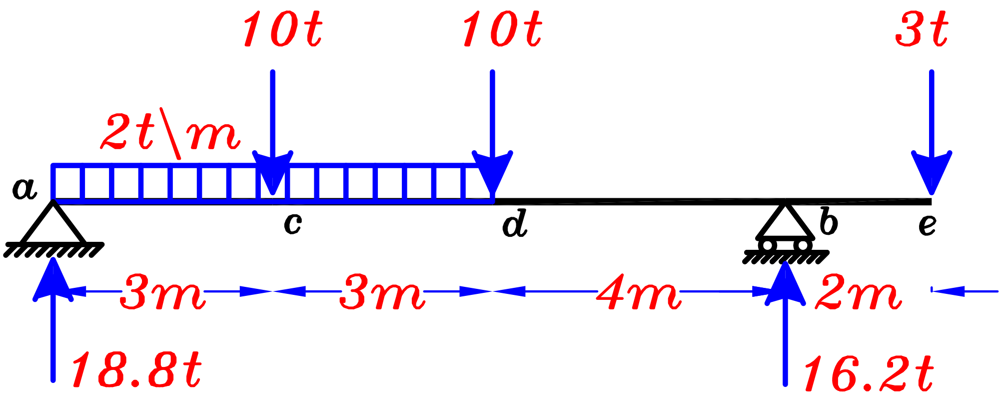
١- نحسب الـ *Reactions* و نرسم الـ *B.M.D* للكمرة .
٢- نحول الكمرة الحقيقية الى كمرة تخيلية عن طريق تحويل الـ *Supports* .
٣- نقسم المساحات و نحسب الـ *Elastic Load* .
٤- نحسب الـ *Reactions* للكمرة التخيلية لو احتاجناها .
٥- اذا كان المطلوب حساب الـ *deflection* فى الكمرة الاصلية عند نقطة معينة نحسب الـ *Moment* عند نفس النقطة فى الكمرة التخيلية و اذا كان المطلوب الـ *Slope angle* فى الكمرة الاصلية نحسب الـ *Shear* فى الكمرة التخيلية .

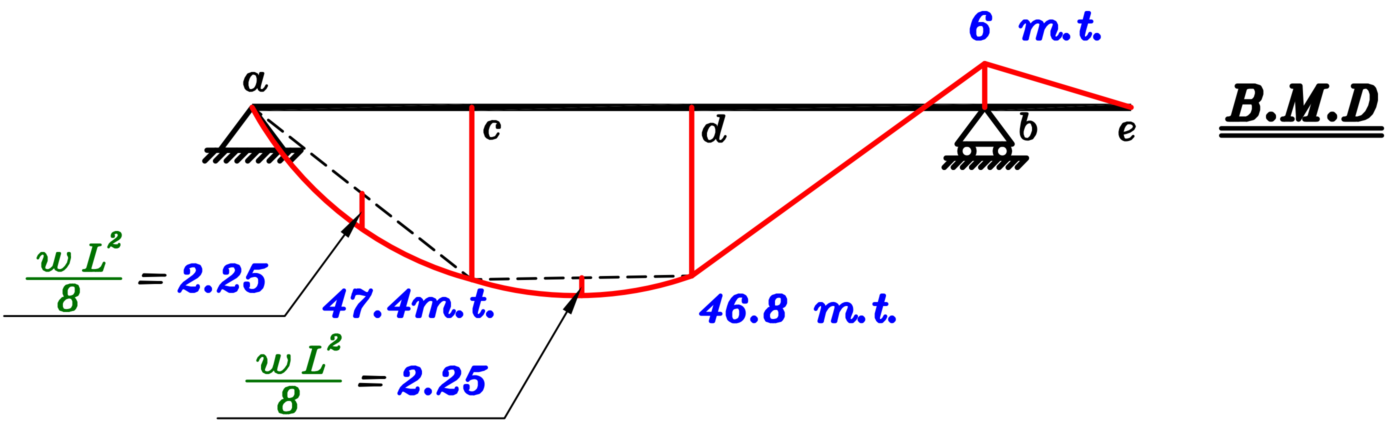
Example:

For the shown beam find the deflection at points (C,d,e) and the slope angle at points (a,b,c,d).

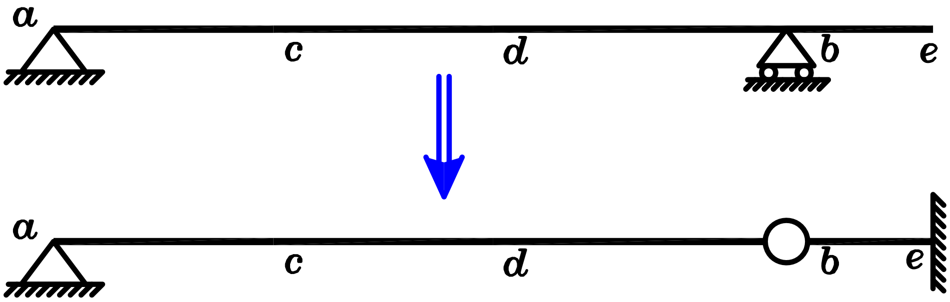


١- نحسب الـ *Reactions* و نرسم الـ *B.M.D* للكمرة .

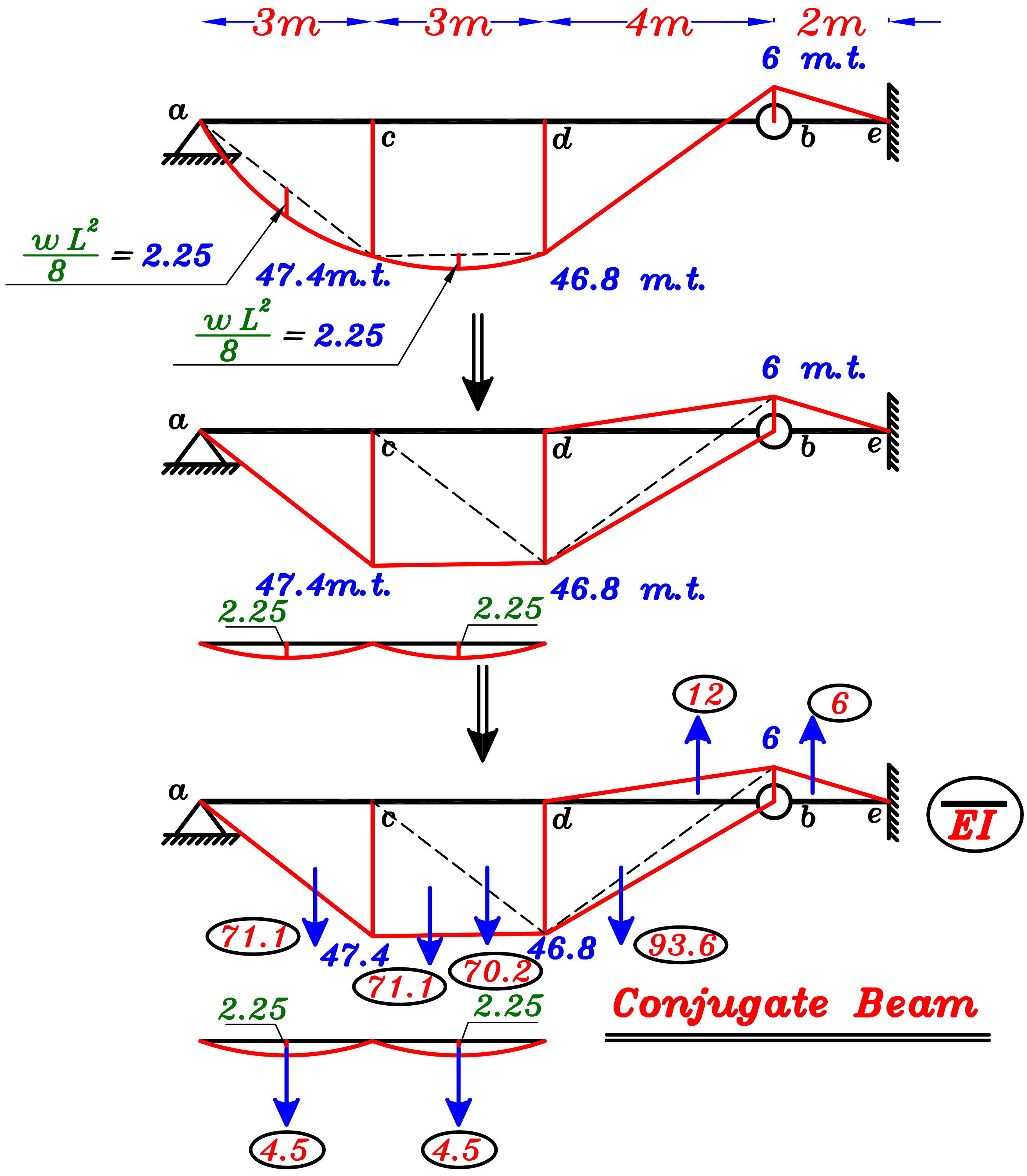




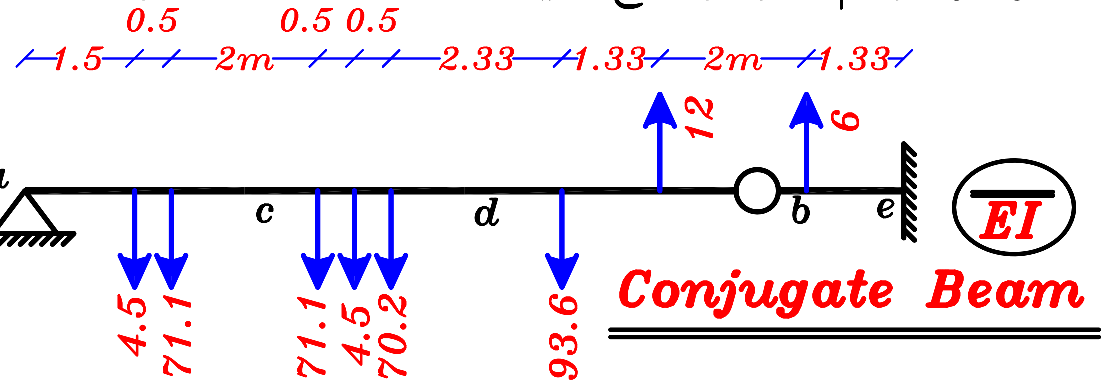
٢- نحول الكمرة الحقيقية الى كمرة تخيلية عن طريق تحويل الـ*Supports* .



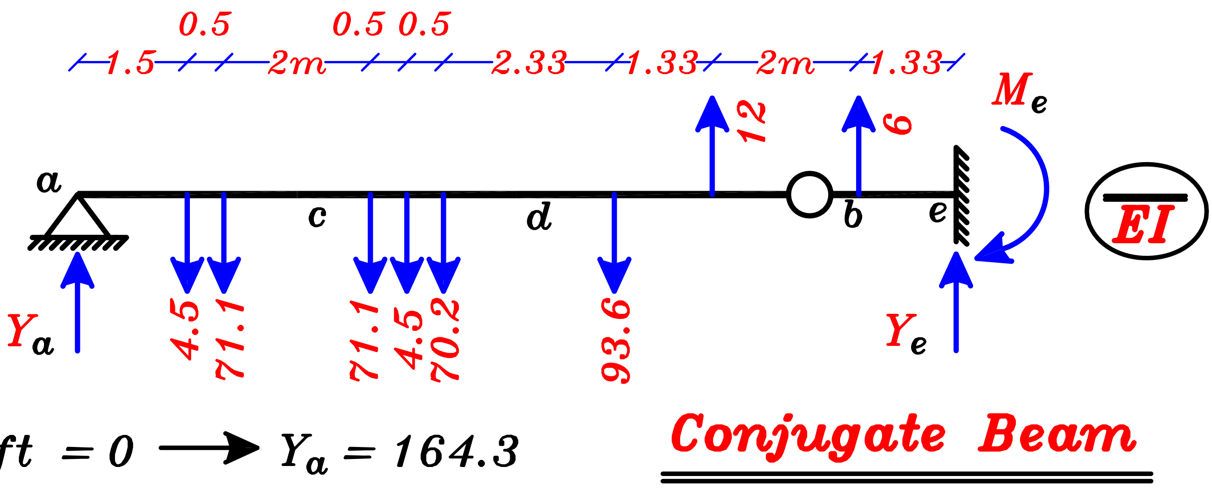
٣- نقسم المساحات و نحسب الـ *Elastic Load* .



من الممكن أن نرسم كمرة و نضع عليها الـ *Elastic load* و ذلك لتسهيل الحل



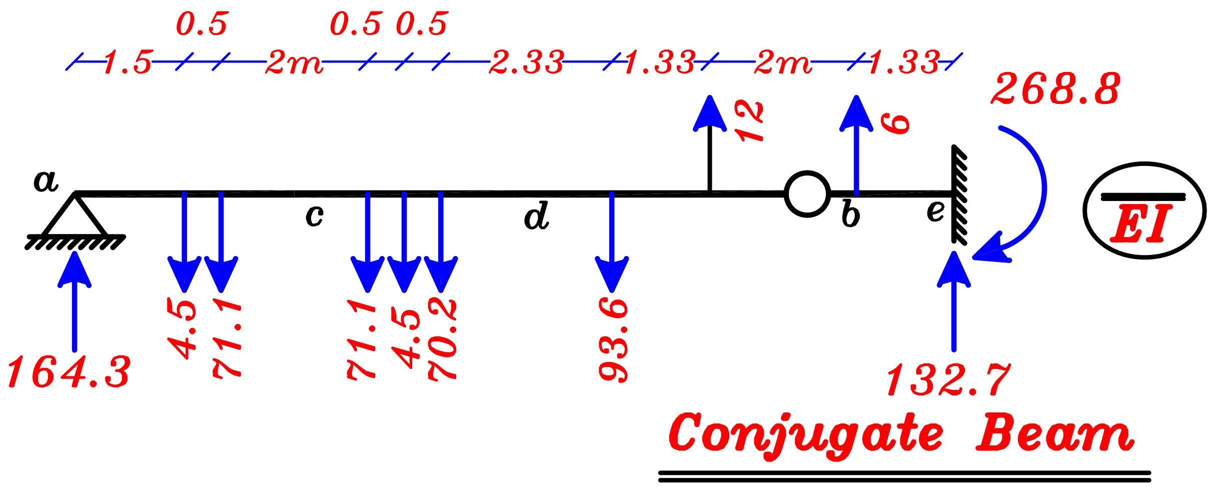
٤- نحسب الـ *Reactions* للكمرة التخيلية لو احتاجناها .



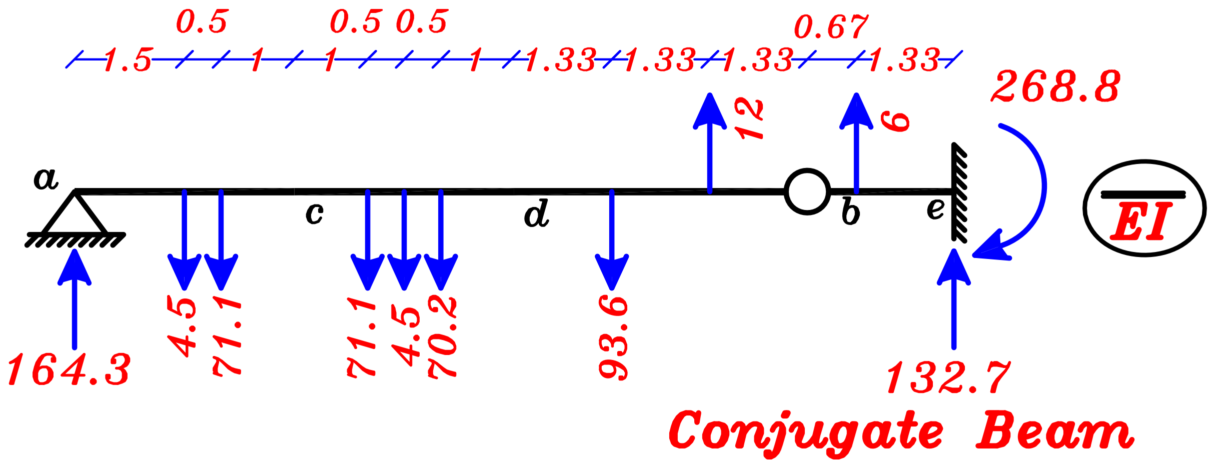
$\Sigma M @ b\ left = 0 \longrightarrow Y_a = 164.3$

$\Sigma Y = 0 \longrightarrow Y_e = 132.7$

$\Sigma M @ b\ right = 0 \longrightarrow M_e = 268.8$

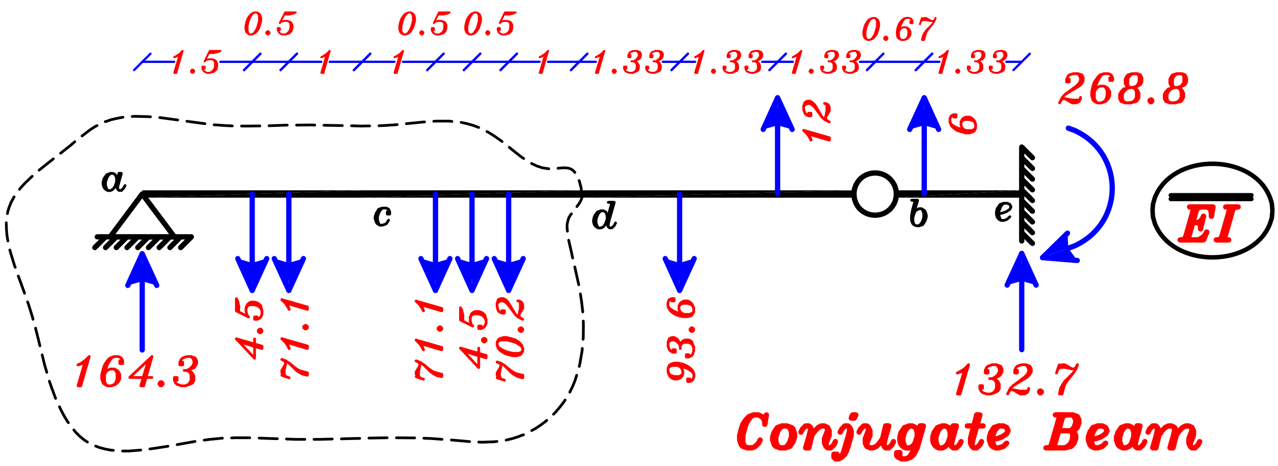


٥- اذا كان المطلوب حساب الـ *deflection* فى الكمرة الاصلية عند نقطة معينة نحسب الـ *Moment* عند نفس النقطة فى الكمرة التخيلية و اذا كان المطلوب الـ *Slope angle* فى الكمرة الاصلية نحسب الـ*Shear* فى الكمرة التخيلية .



$\# \; Y_a' = \alpha_a = \frac{1}{EI}[164.3]$ نحسب الShear عند نقطة a فى ال Conjugate
فيكون هو ال Slope angle عند نقطة a فى الكمرة الاصلية
و نقسم على EI لان أى شئ فى الكمرة التخيلية يكون مقسوم على EI.

نحسب الmoment عند نقطة d فى ال Conjugate
فيكون هو ال deflection عند نقطة d فى الكمرة الاصلية



Conjugate Beam

$$\# \; Y_d = \frac{1}{EI}[164.3*6 - 4.5*4.5 - 71.1*4 - 71.1*2 - 4.5*1.5$$
$$- 70.2*1] = \frac{462}{EI}$$

$$\# \; Y_C = \frac{1}{EI}[164.3*3 - 4.5*1.5 - 71.1*1] = \frac{415.05}{EI}$$

$$\# \; Y_C' = \alpha_C = \frac{1}{EI}[164.3 - 4.5 - 71.1] = \frac{88.7}{EI}$$

$$\# \; Y_d' = \alpha_d = \frac{1}{EI}[164.3 - 4.5 - 71.1 - 71.1 - 4.5 - 70.2]$$
$$= \frac{-57.12}{EI}$$

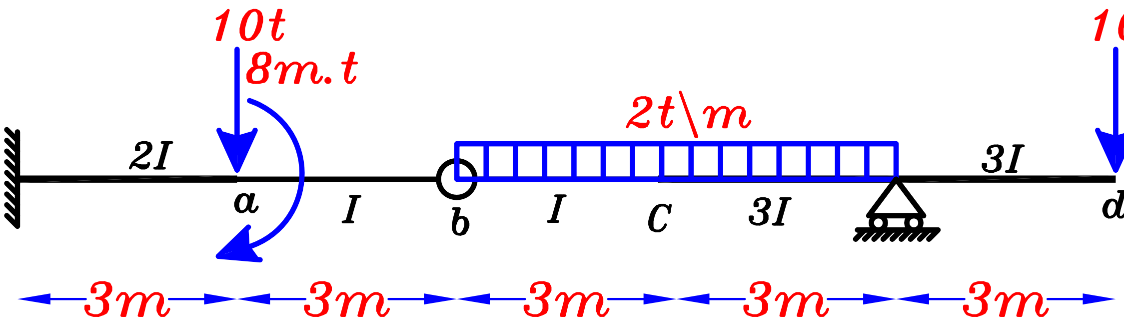
$$\# \; Y_b' = \alpha_b = \frac{1}{EI}[-132.7 - 6] = \frac{-138.7}{EI}$$

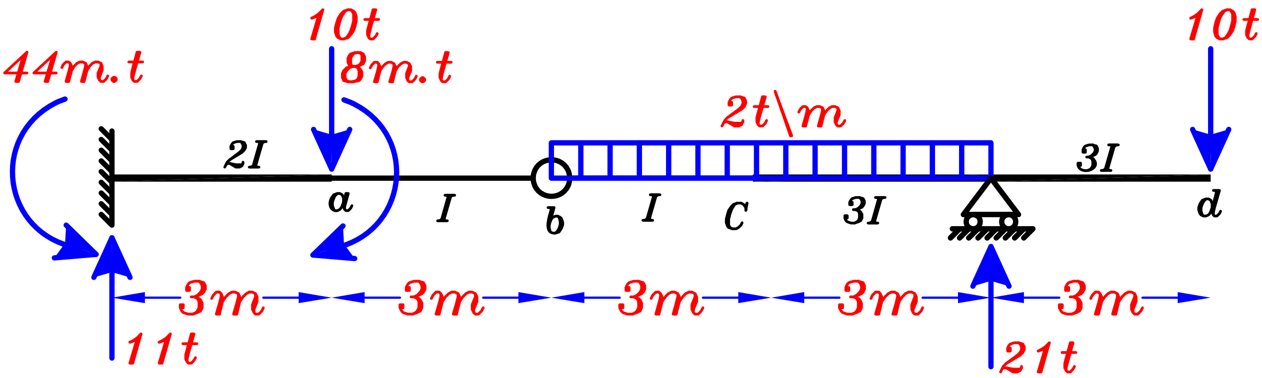
$$\# \; Y_e = \frac{-268.8}{EI}$$

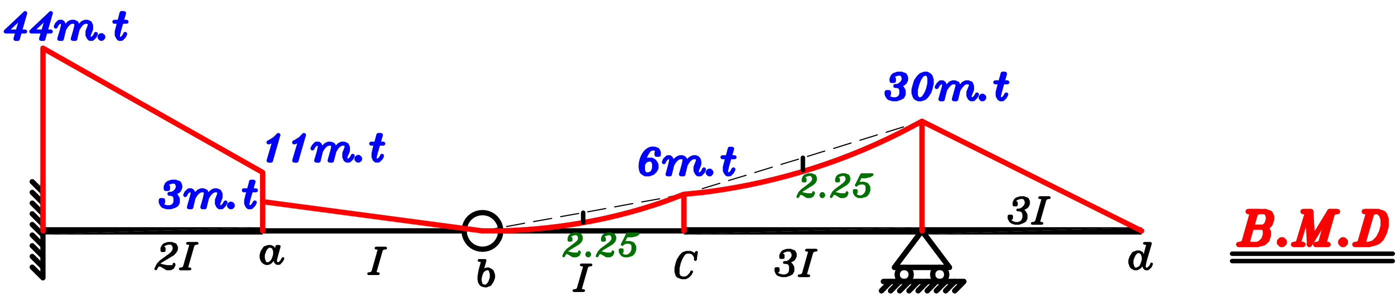
$$\# \; Y_e' = \alpha_e = \frac{-132.7}{EI}$$

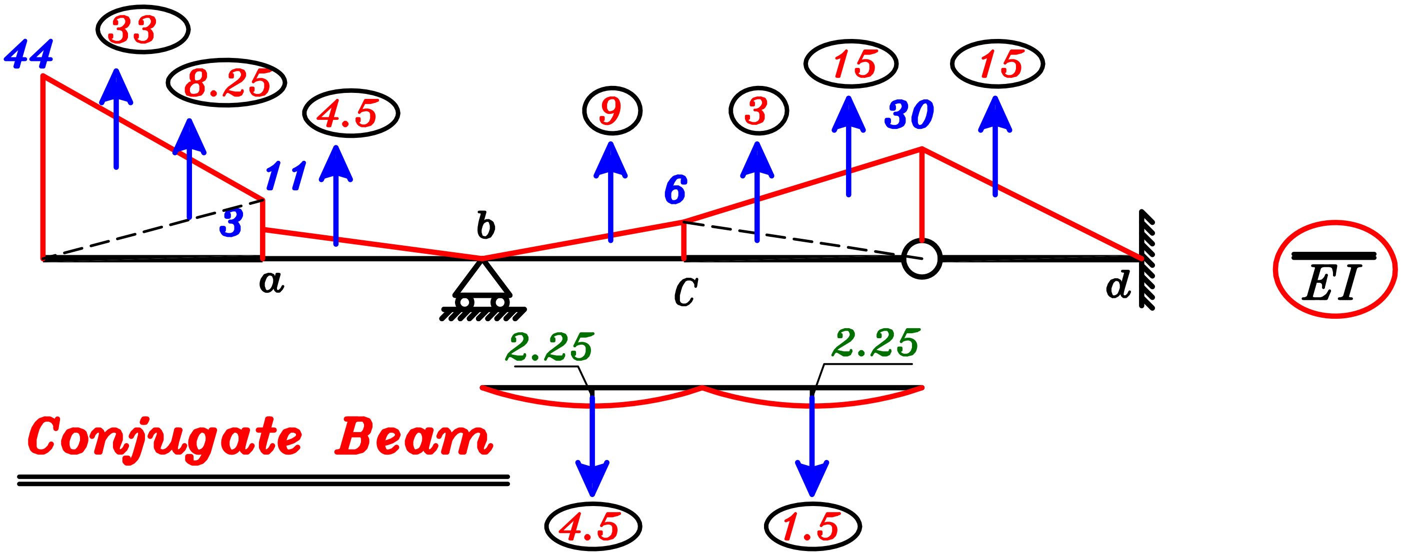
Example:

For the shown beam find the deflection at points (a,c,d,b) and the slope angle at points (a,c,d) and the change in slope angle at point (b) .

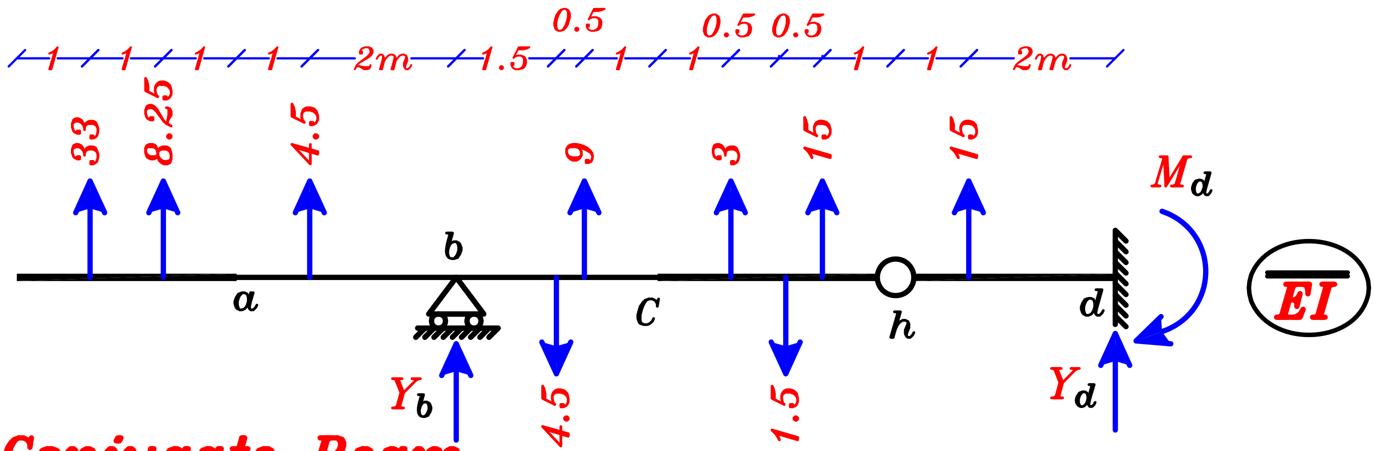








Conjugate Beam

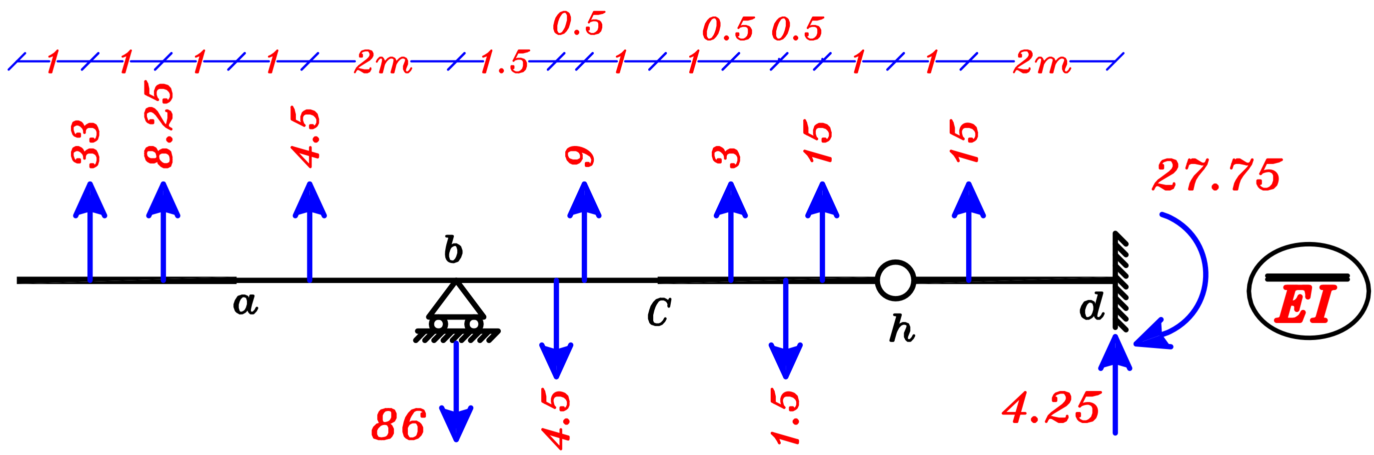


Conjugate Beam

$\Sigma M @ h\, left = 0 \longrightarrow Y_b = -86$

$\Sigma Y = 0 \longrightarrow Y_d = 4.25$

$\Sigma M @ h\, right = 0 \longrightarrow M_d = 27.75$



$\# \; Y_a = \frac{1}{EI}[8.25*1 + 33*2] = \frac{74.25}{EI}$

$\# \; Y_a' = \alpha_a = \frac{1}{EI}[33 + 8.25] = \frac{41.25}{EI}$

$\# \; Y_b = \frac{1}{EI}[4.5*2 + 8.25*4 + 33*5] = \frac{207}{EI}$

لحساب ال *Change in slope angle* فى الكمرة الاصلية نحسب ال*slope angle* يمين و شمال النقطة ثم نوجد الفرق بينهما و لذلك نحسب ال*Shear* يمين و شمال هذه النقطة فى الكمرة التخيلية و نوجد الفرق بينهما و يكون هذا الفرق هو قيمة الموجود عند هذه النقطة فى الكمرة التخيلية

$\# \; \alpha_{b\,left} = \frac{45.75}{EI} \qquad \alpha_{b\,right} = -\frac{71.95}{EI}$

$\# \; \Delta\alpha_b = \frac{45.75}{EI} - \frac{-71.95}{EI} = \frac{117.7}{EI}$

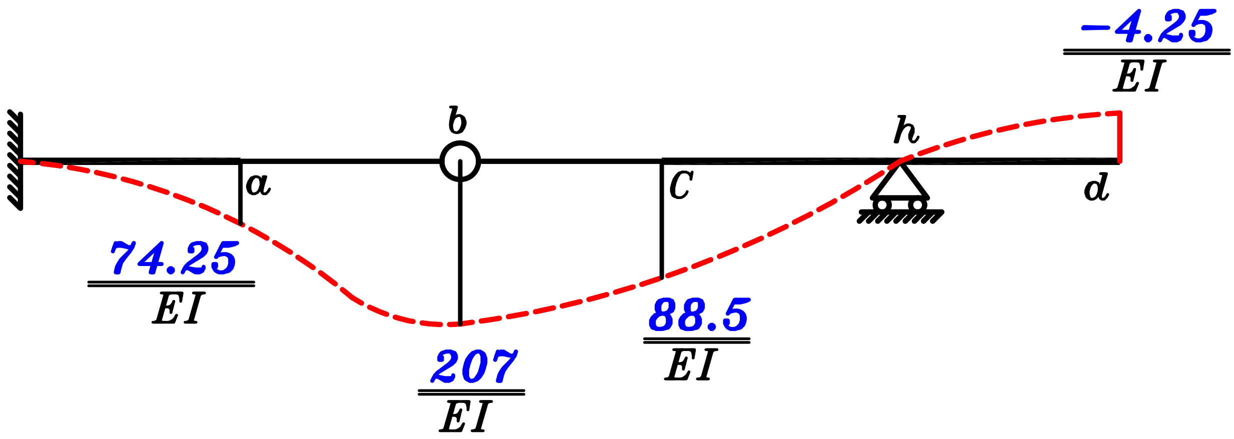
$$\# \; Y_C = \frac{1}{EI}[4.25*6 + 15*4 + 15*2 + 3*1 - 1.5*1.5 - 27.75]$$

$$= \frac{88.5}{EI}$$

$$\# \; \grave{Y_C} = \alpha_C = \frac{1}{EI}[-4.25 - 15 - 15 - 3 + 1.5] = \frac{-35.75}{EI}$$

$$\# \; Y_d = \frac{-27.75}{EI}$$

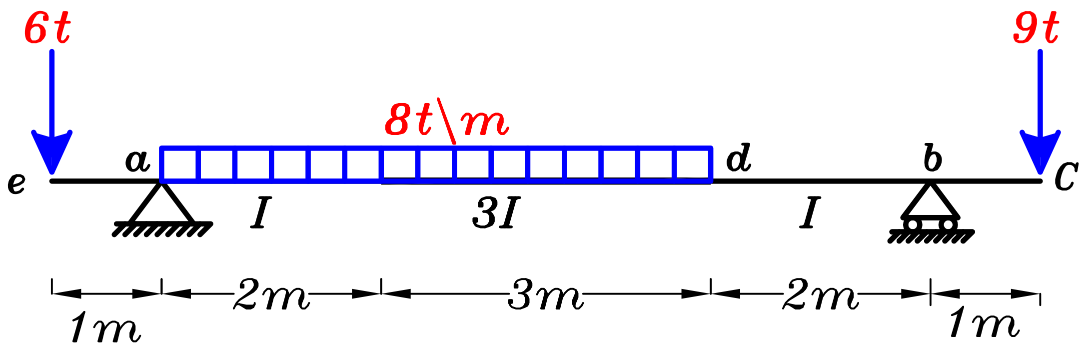
$$\# \; \grave{Y_d} = \alpha_d = \frac{-4.25}{EI}$$

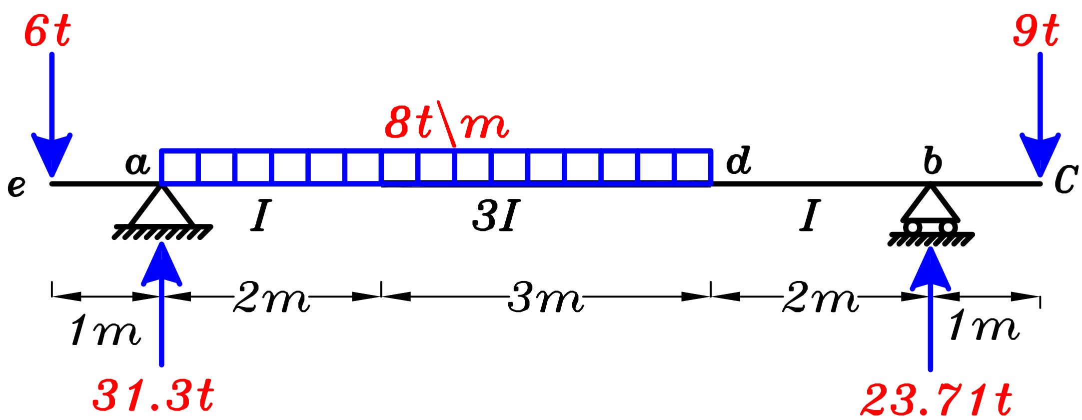


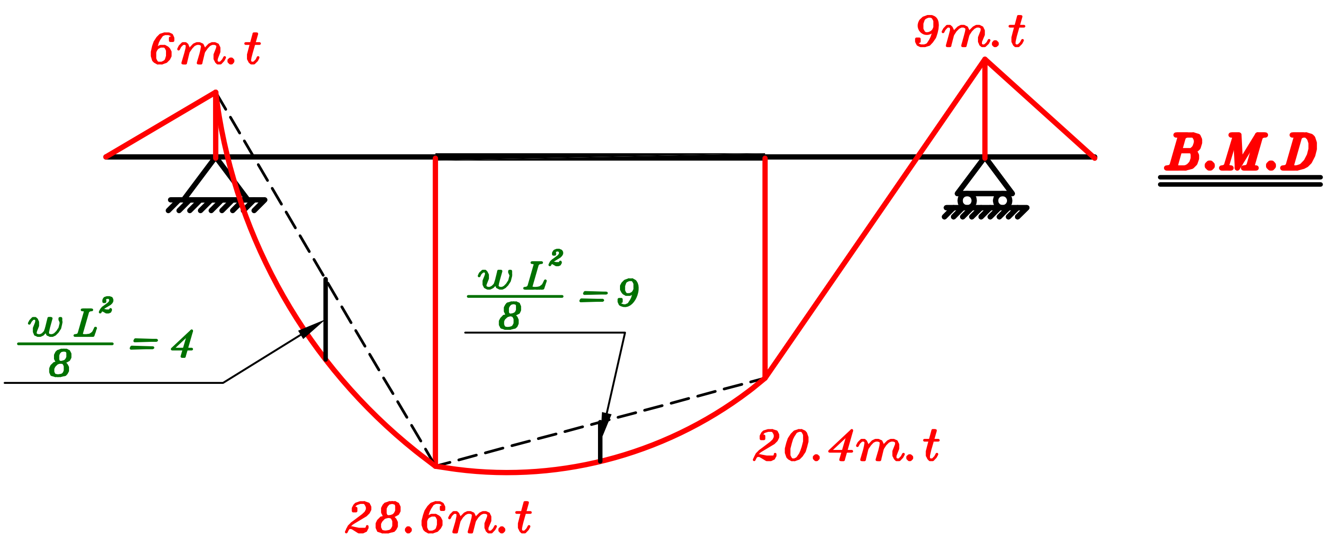
Deflection Curve

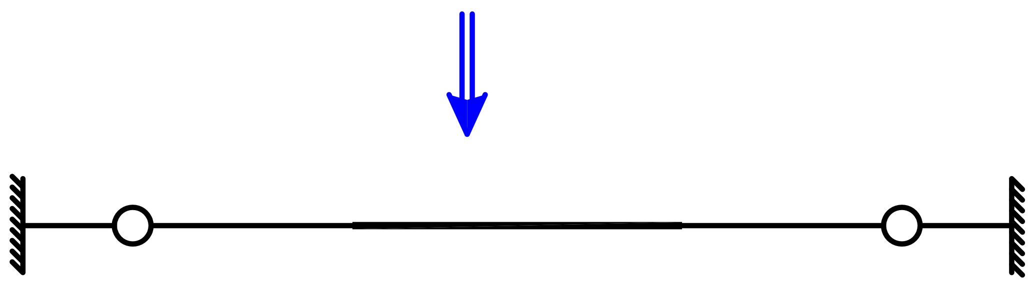
Example:

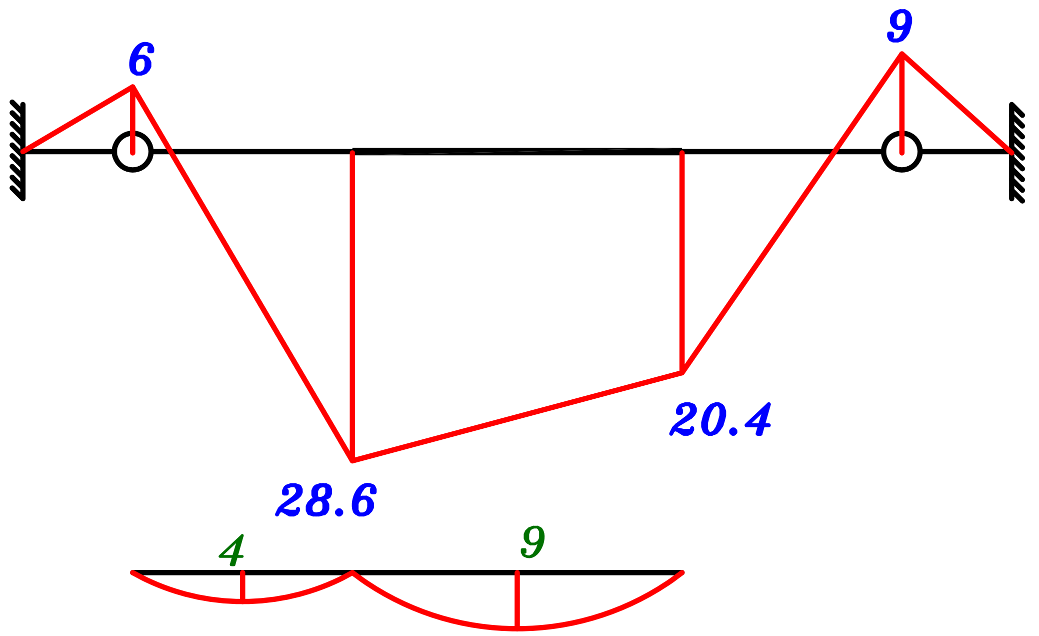
For the shown beam find the deflection at points (c,d,e) and the slope angle at points (a&d) .

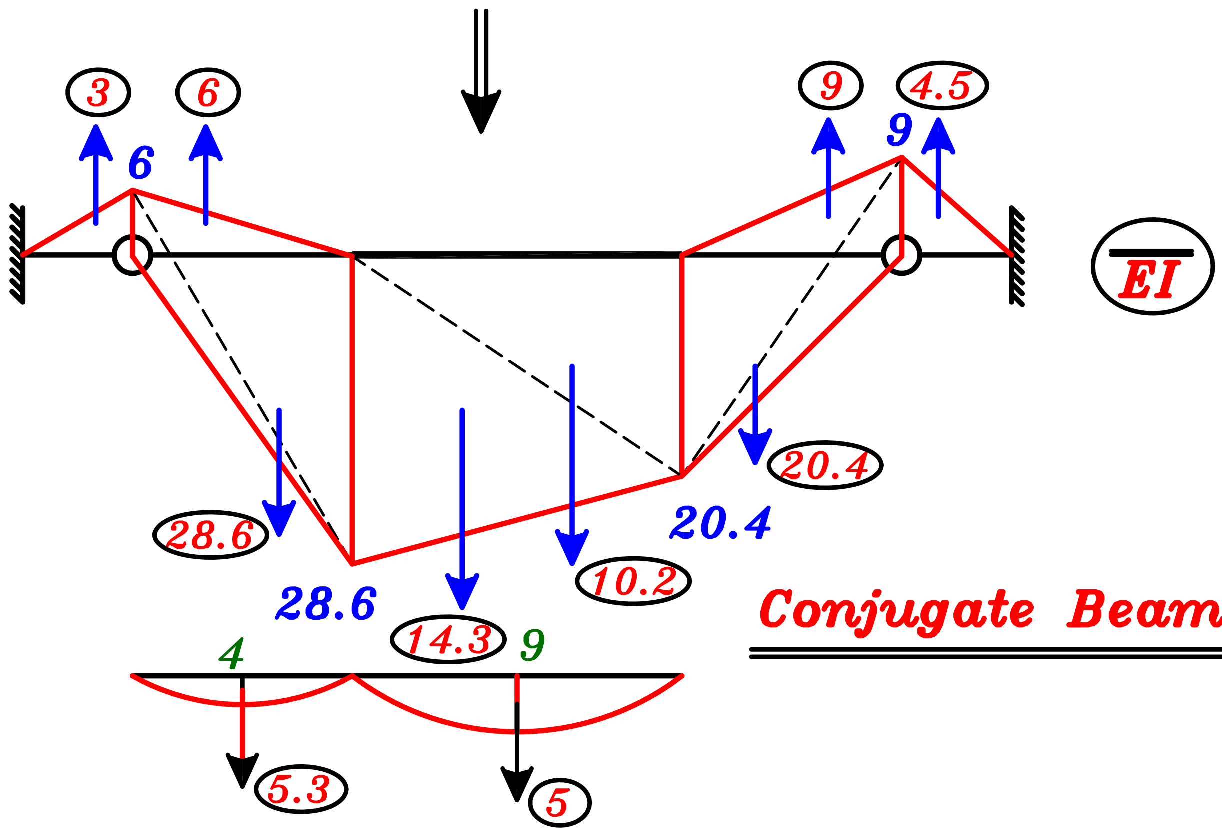




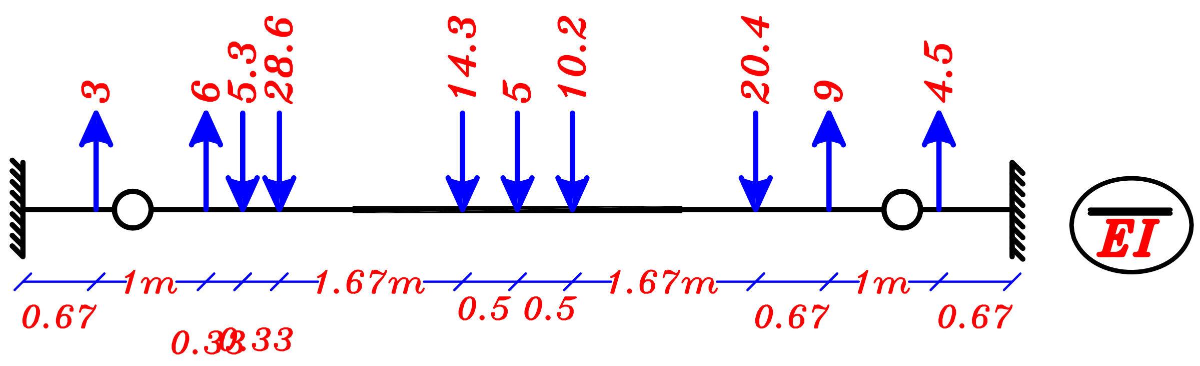




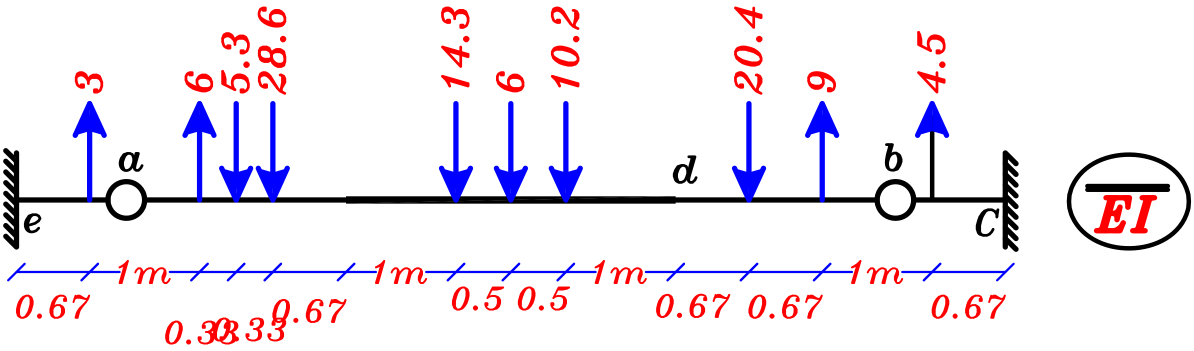


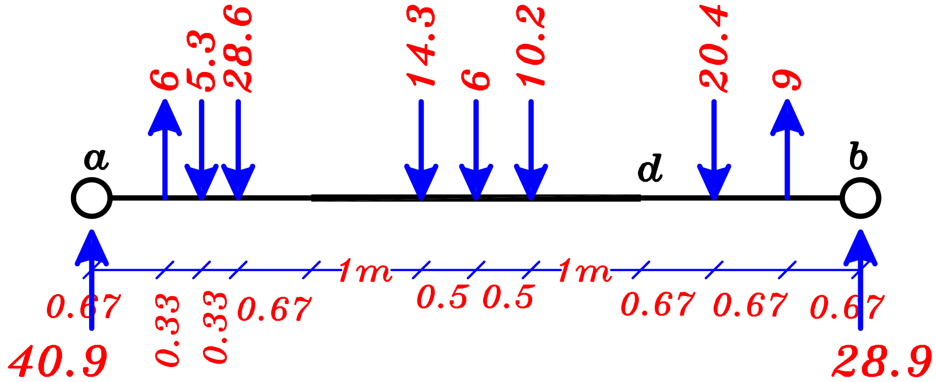


Conjugate Beam

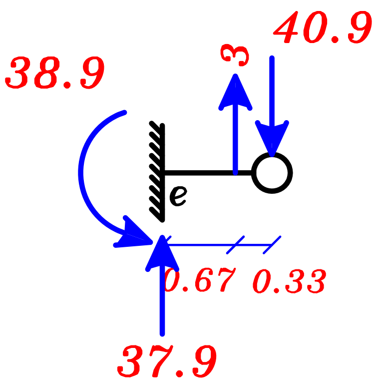


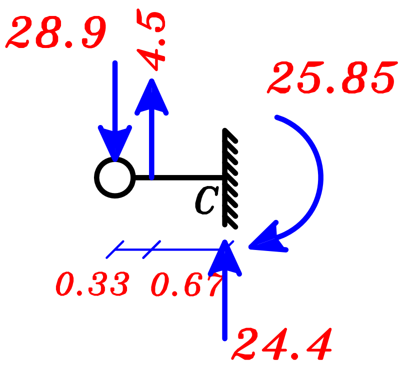
لحساب ال *Reactions* لهذه ال *Conjugate Beam* نحتاج الى فك هذه الكمرة





نحسب ال *Reactions* للجزء *ab* ثم نعكسها على الجزئين الاخرين





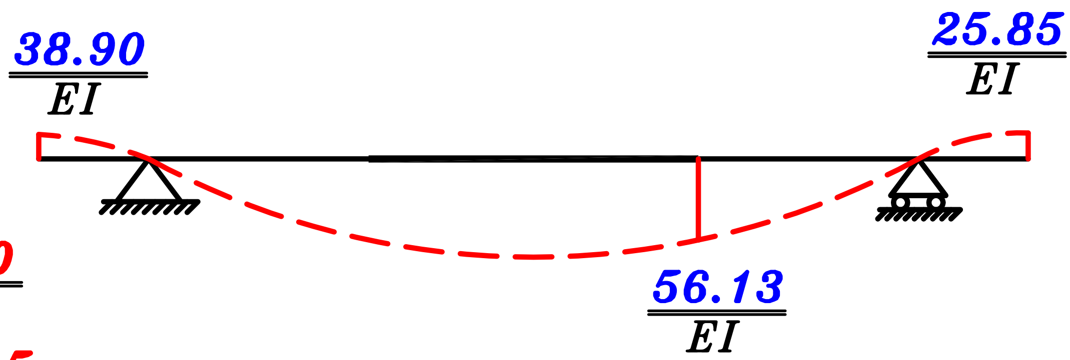
$$\# \; Y_d = \frac{1}{EI}[28.9 * 2 + 9 * 1.33 - 20.4 * 0.67] = \frac{56.13}{EI}$$

$$\# \; Y_C = -\frac{25.85}{EI}$$

$$\# \; Y_e = -\frac{38.90}{EI}$$

$$\# \; Y_a' = \alpha_a = \frac{40.90}{EI}$$

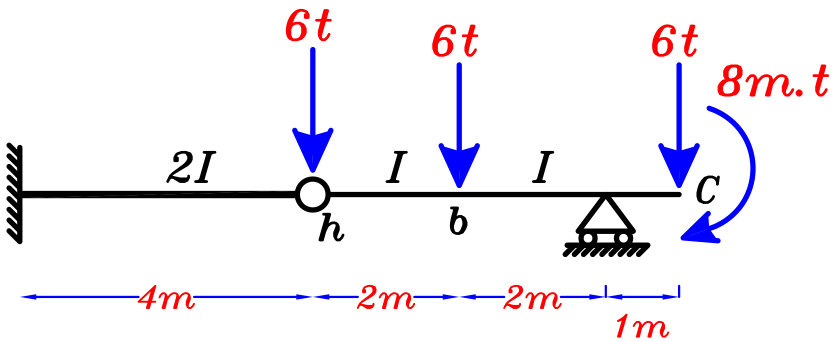
$$\# \; Y_d' = \alpha_d = -\frac{17.5}{EI}$$

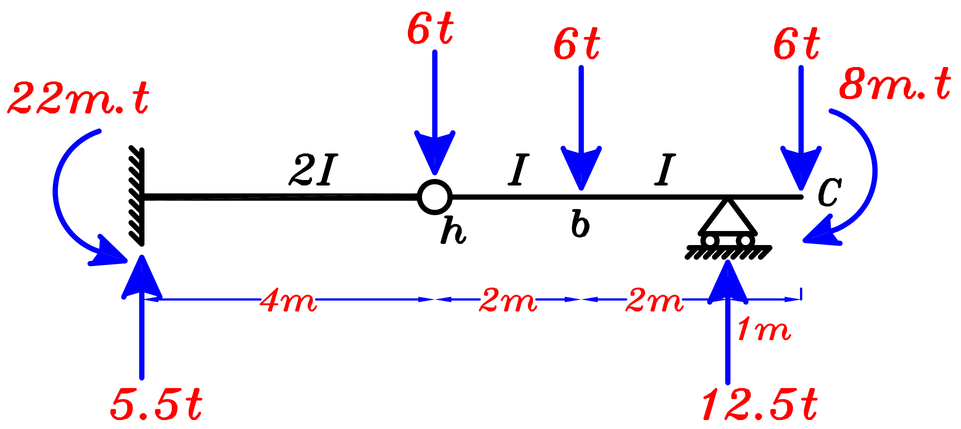


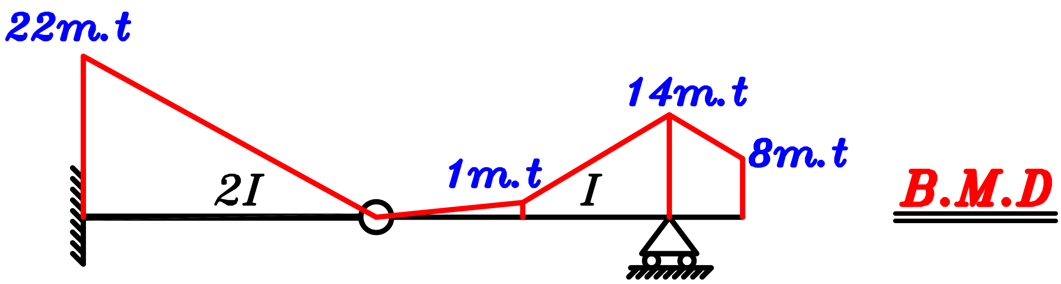
Deflection Curve

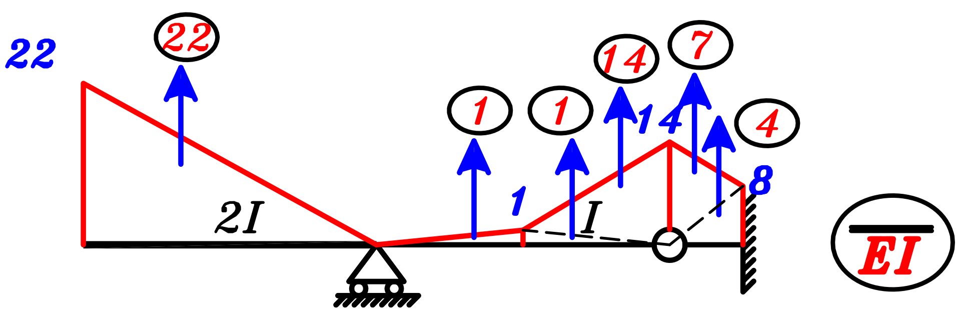
Example:

For the shown beam find the deflection at points (C,h,b) and the slope angle at points (b&C) .

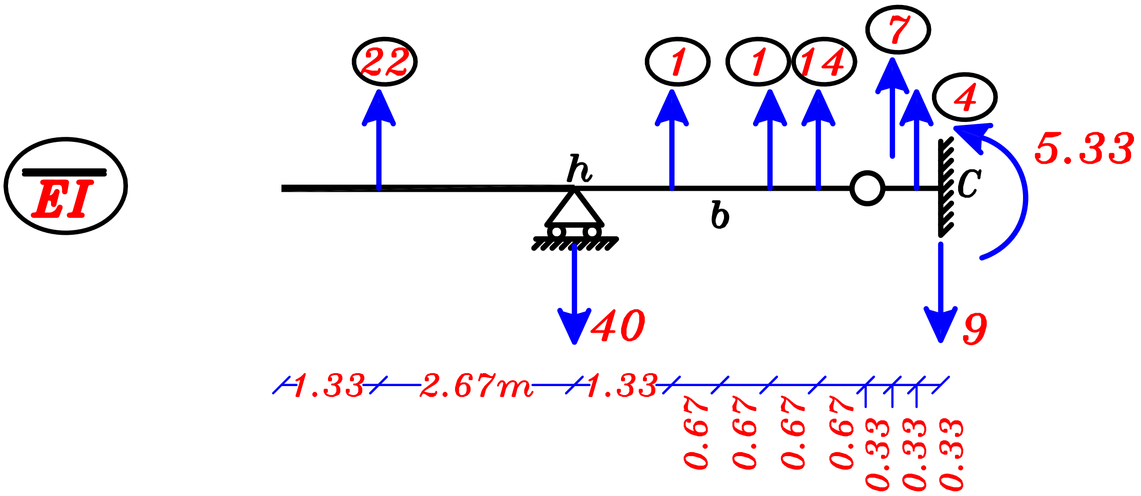








Conjugate Beam



Conjugate Beam

$$\# \; Y_h = \frac{1}{EI}[22 * 2.67] = \frac{58.66}{EI}$$

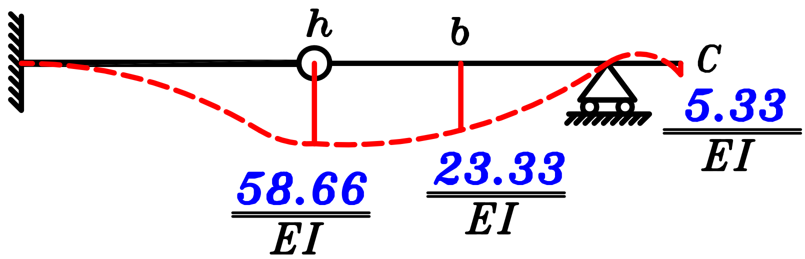
$$\# \; Y_C = \frac{5.33}{EI}$$

$$\# \; Y_b = \frac{1}{EI}[22 * 4.67 - 40 * 2 + 1 * 0.67] = \frac{23.33}{EI}$$

$$\# \; Y_C^{`} = \alpha_C = \frac{9}{EI}$$

$$\# \; Y_b^{`} = \alpha_b = [22 - 40 + 1] = -\frac{17}{EI}$$

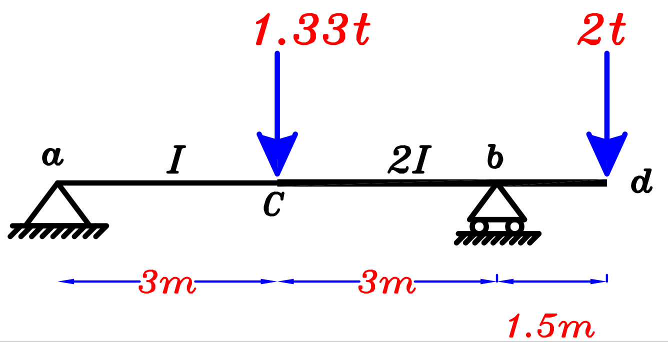
$$\# \; \Delta \alpha_h = \frac{40}{EI}$$

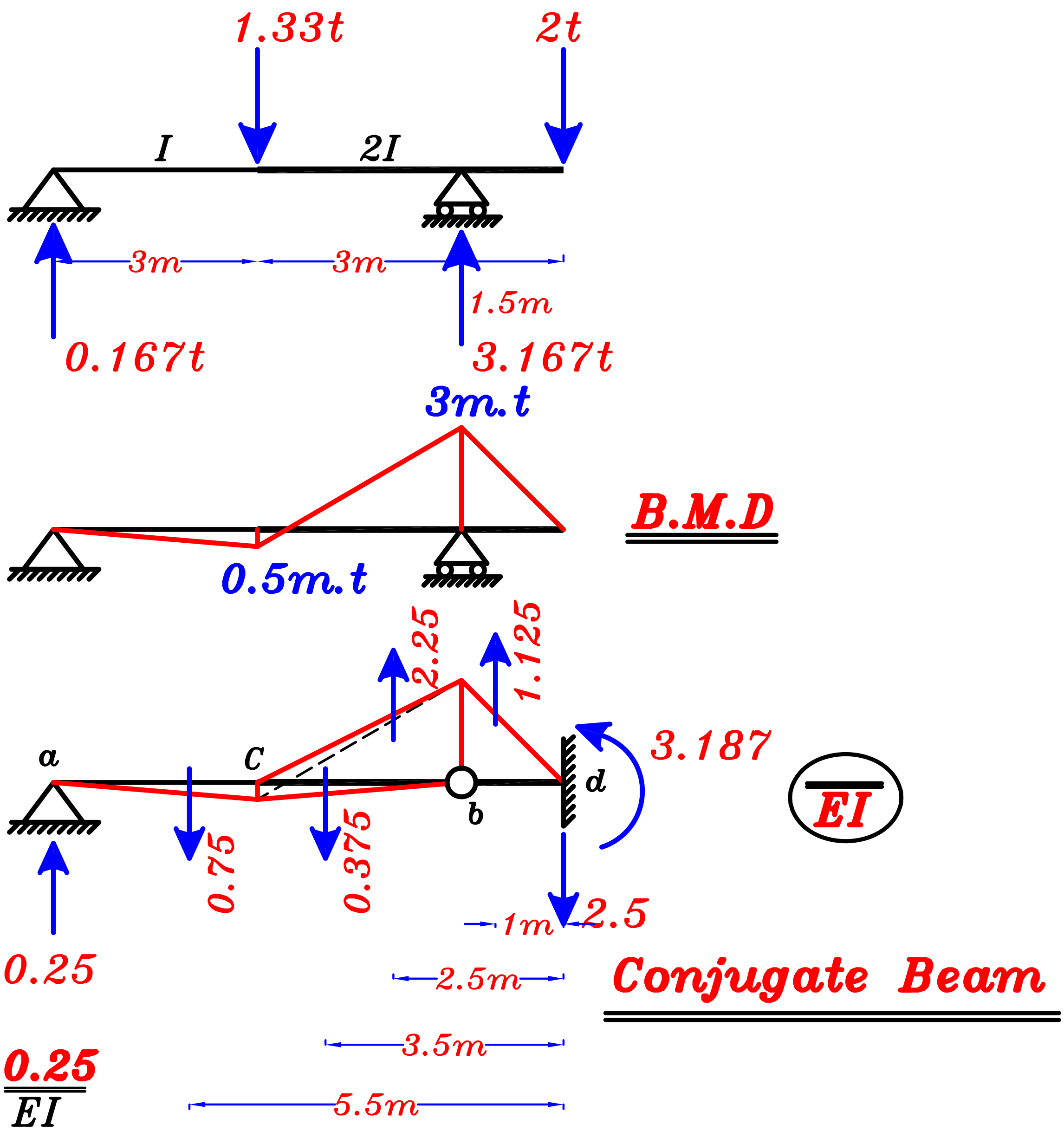


Deflection Curve

Example:

For the shown beam find the deflection at points (d) and the slope angle at points (a&b&C&d) .





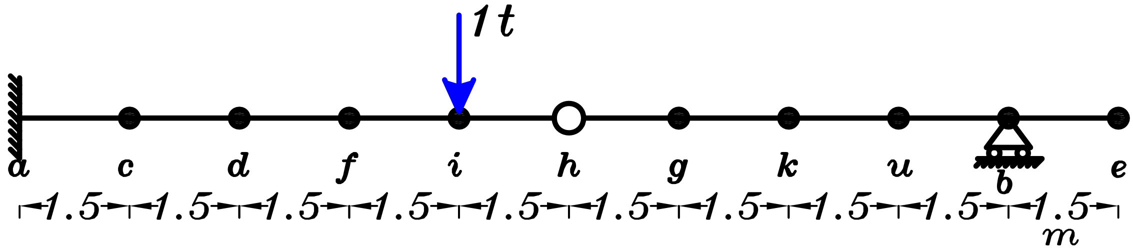
$$\# \; \grave{Y}_a = \alpha_a = \frac{0.25}{EI}$$

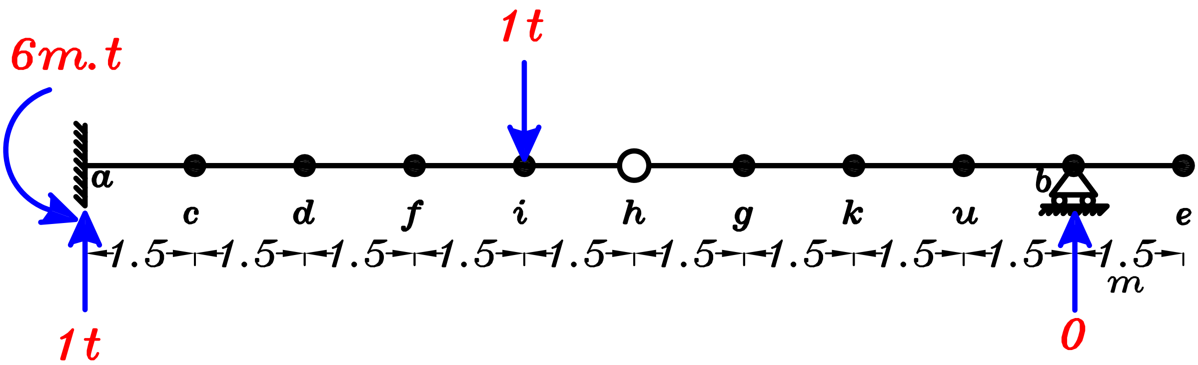
$$\# \; \grave{Y}_C = \alpha_C = -\frac{0.50}{EI} \qquad \# \; \grave{Y}_b = \alpha_b = \frac{1.375}{EI}$$

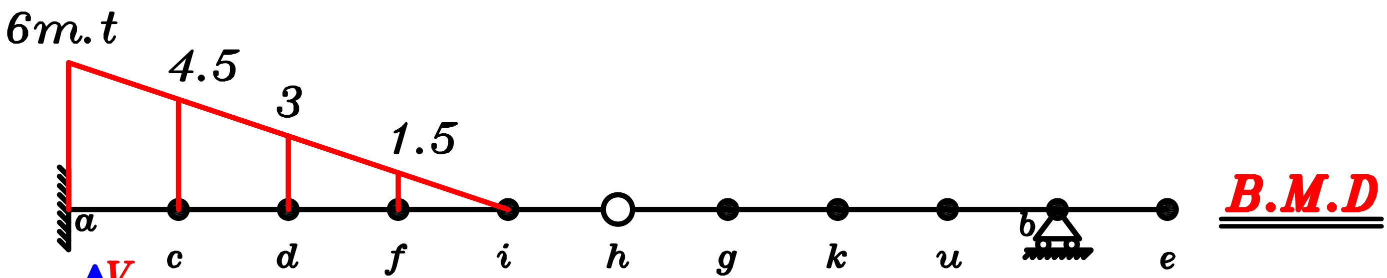
$$\# \; \grave{Y}_d = \alpha_d = \frac{2.50}{EI} \qquad \# \; Y_d = \frac{3.1875}{EI}$$

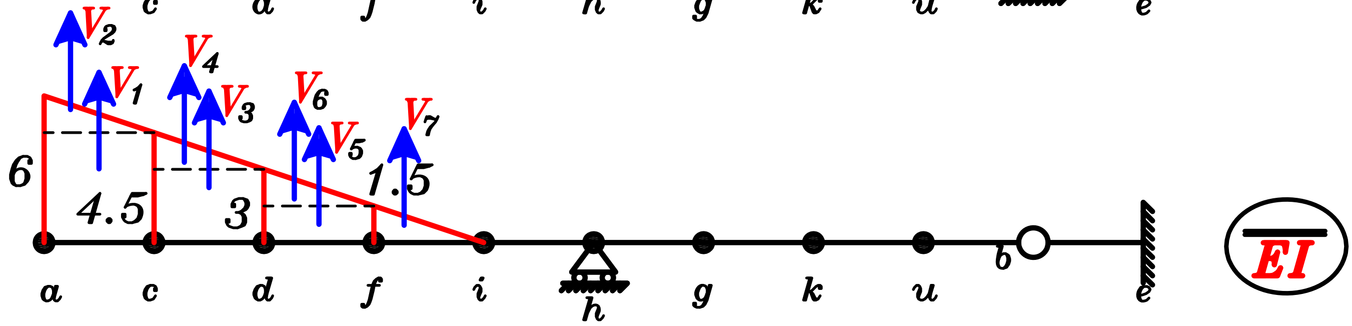
Example:

For the shown beam , find and draw the deflection curve by calculating the deflection at marked points. Then calculate the change in slope angle at point (H)









Conjugate Beam

$$\# \ V_1 = 4.5 * 1.5 = 6.75$$

$$\# \ V_2 = \frac{1}{2} * 1.5 * 1.5 = 1.125$$

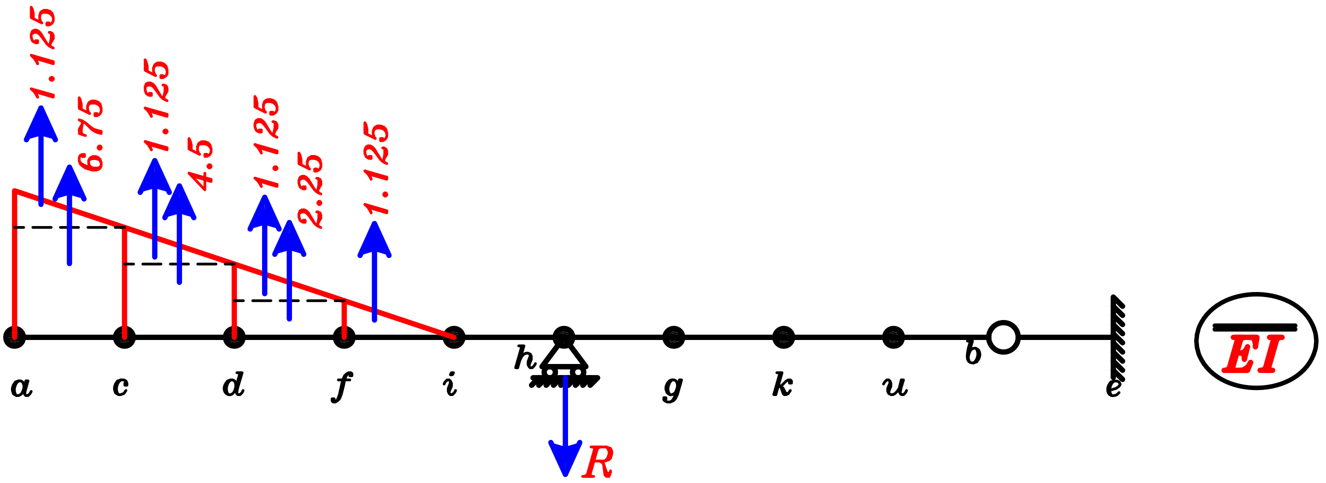
$$\# \ V_3 = 3 * 1.5 = 4.5$$

$$\# \ V_4 = \frac{1}{2} * 1.5 * 1.5 = 1.125$$

$$\# \; V_5 = 1.5 * 1.5 = 2.25$$

$$\# \; V_6 = \frac{1}{2} * 1.5 * 1.5 = 1.125$$

$$\# \; V_7 = \frac{1}{2} * 1.5 * 1.5 = 1.125$$



Conjugate Beam

$$\Sigma M @ b \; left = 0 \longrightarrow R = 34.5$$

$$\# \; Y_C = \frac{1}{EI}[(6.75 * 0.75) + (1.125 * 1)] = \frac{6.1875}{EI} \; m$$

$$\# \; Y_d = \frac{1}{EI}[(6.75 * 2.25) + (1.125 * 2.5) \; (4.50 * 0.75) + (1.125 * 1.0)] = \frac{22.5}{EI} \; m$$

$$\# \; Y_f = \frac{45.5625}{EI} \; m \qquad \# \; Y_i = \frac{72.0}{EI} \; m \qquad \# \; Y_h = \frac{99.0}{EI} \; m$$

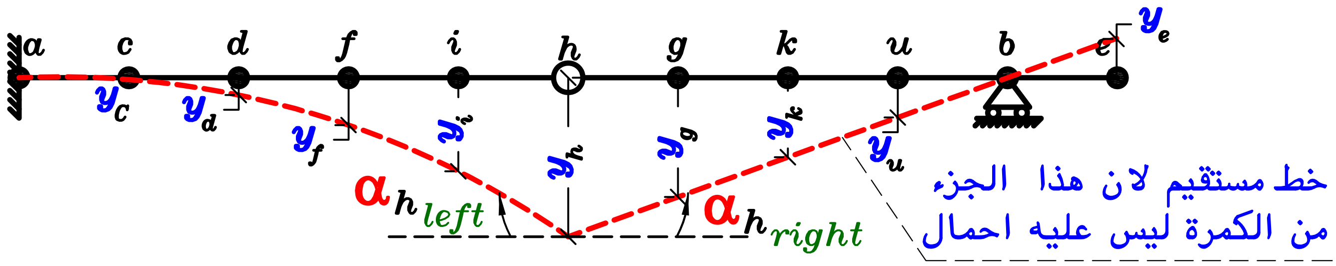
$$\# \; Y_u = \frac{24.75}{EI} \; m \qquad \# \; Y_g = \frac{74.25}{EI} \; m \qquad \# \; Y_e = -\frac{24.75}{EI} \; m$$

$$\# \; \alpha_e = \frac{1}{EI}[1.125 + 6.75 + 1.125 + 4.5 + 1.125 + 2.25 + 1.125 - 34.5] = -\frac{16.50}{EI}$$

$$\alpha_{h_{left}} = \frac{1}{EI}[1.125 + 6.75 + 1.125 + 4.5 + 1.125 + 2.25 + 1.125] = +\frac{18.0}{EI} \text{ rad.}$$

$$\alpha_{h_{right}} = \frac{1}{EI}[1.125 + 6.75 + 1.125 + 4.5 + 1.125 + 2.25 + 1.125 - 34.5] = -\frac{16.5}{EI} \text{ rad.}$$

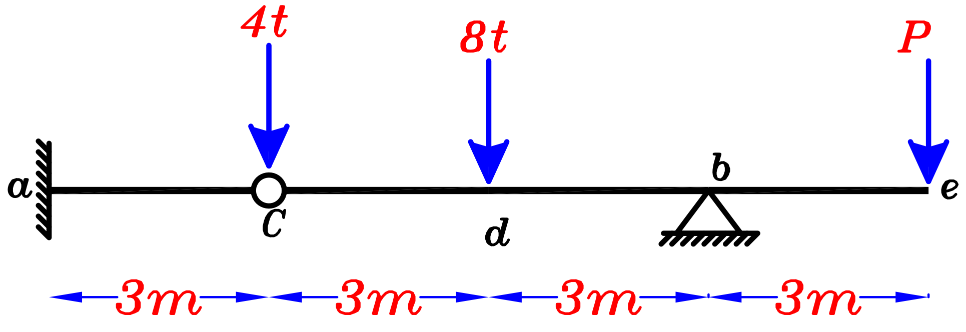
$$\Delta\alpha_h = \frac{34.5}{EI} \text{ rad.}$$



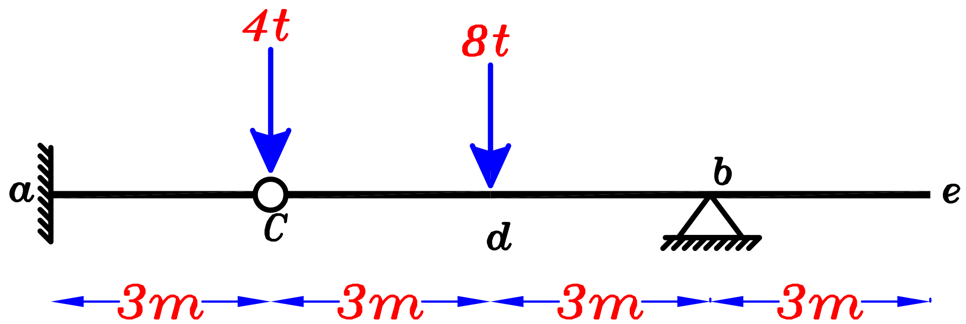
Deflection Curve

Example:

For the shown beam find the load (P) so that the deflection at C = 0 and then find the deflection at points (d&C) and the slope angle at points (e&b&C&d) .

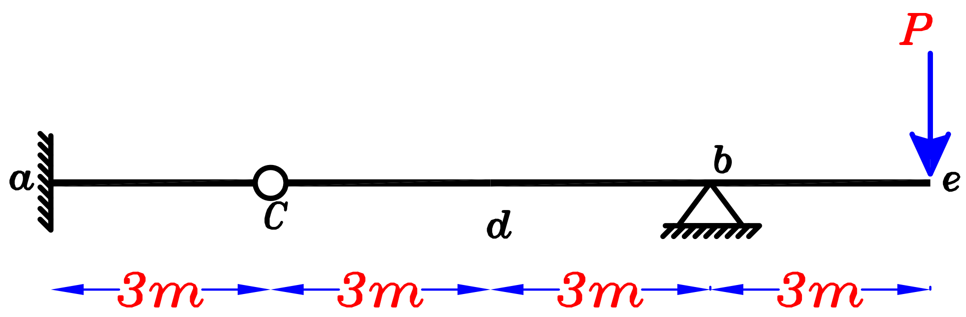


لتسهيل الحل يتم حل المسألة على أساس أنها كمرتين عن طريق عمل *Super position* .
كمرة عليها الاحمال المطلوبة + كمرة عليها الاحمال المعلومة
نحل كل كمرة على حدا و نجمع النتائج فى النهاية .



Beam (1)

$\oplus$

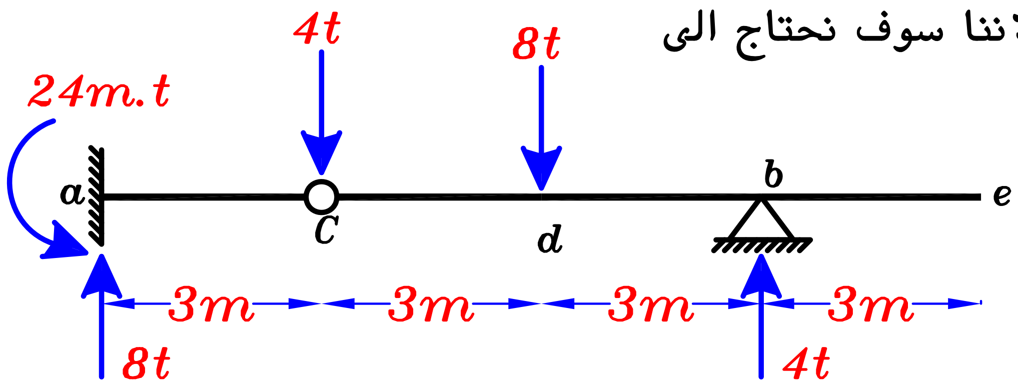


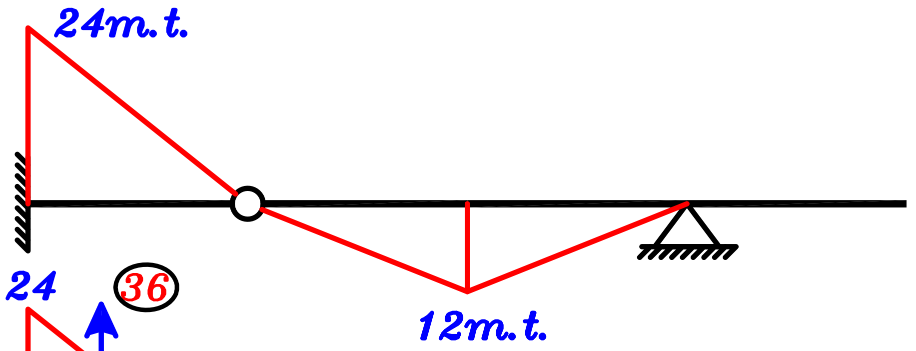
Beam (2)

نحتاج الى حساب الـ *deflection* من الكمرة الاولى عند نقطة *(C)* و حساب الـ *deflection* من الكمرة الثانية عند نقطة *(C)* ثم نجمع الـ *deflection* عند نقطة *(C)* من الكمرتين و نساويه بالـ *deflection* عند نقطة *(C)* فى الكمرة الاصلية أى يساوى صفر .

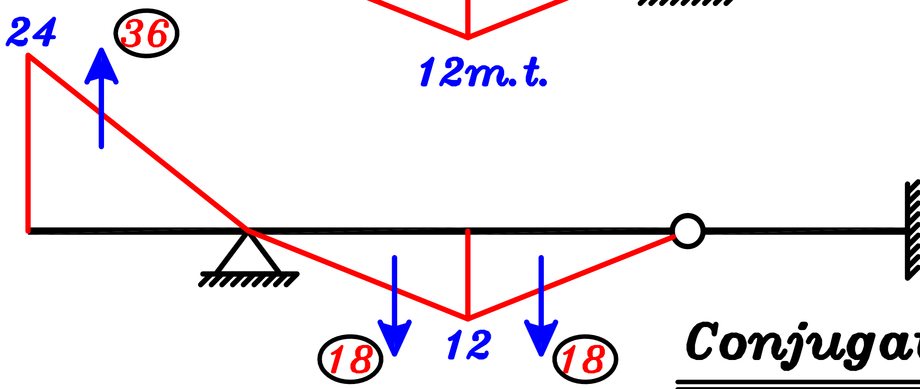
Beam (1)

نحسب ال deflection عند نقطة (C) و يفضل حساب باقى مطاليب المسألة لاننا سوف نحتاج الى حسابها فى النهاية .



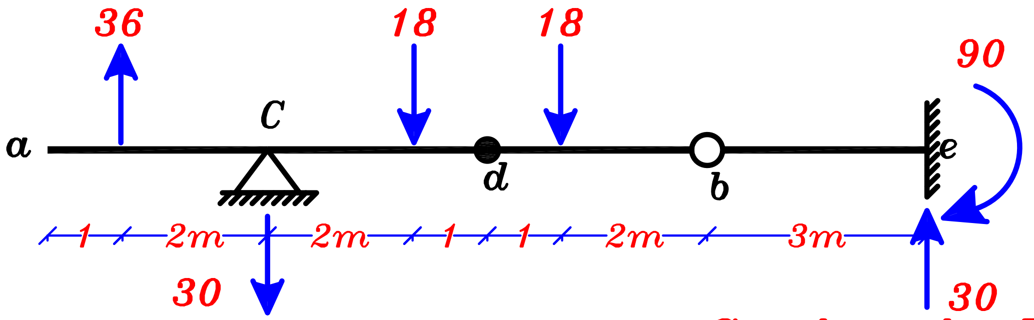


B.M.D



$\overline{EI}$

Conjugate Beam



$\overline{EI}$

Conjugate Beam

$Y_C = \frac{1}{EI}[36 * 2] = \frac{72}{EI}$

$\Delta\ \alpha_C = \frac{30}{EI}$

$Y'_d = \alpha_d = [36 - 30 - 18] = -\frac{12}{EI}$

$Y'_b = \alpha_b = -\frac{30}{EI}$

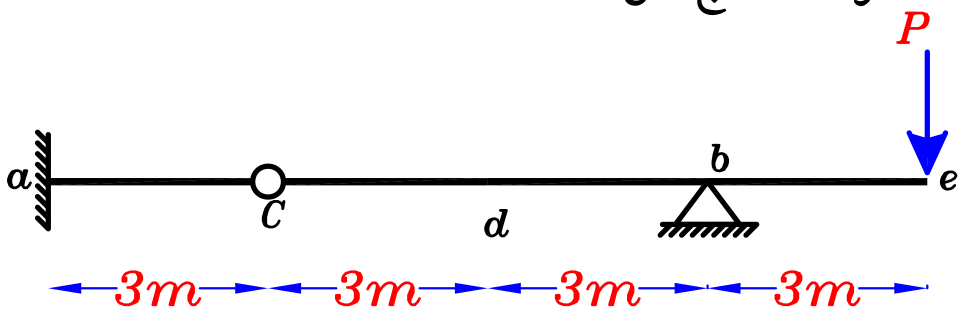
$Y_d = \frac{72}{EI}$

$Y_e = -\frac{90}{EI}$

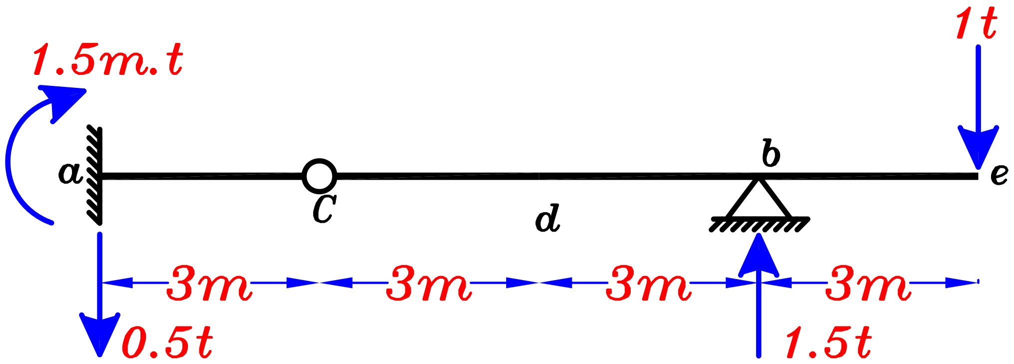
$Y'_e = \alpha_e = -\frac{30}{EI}$

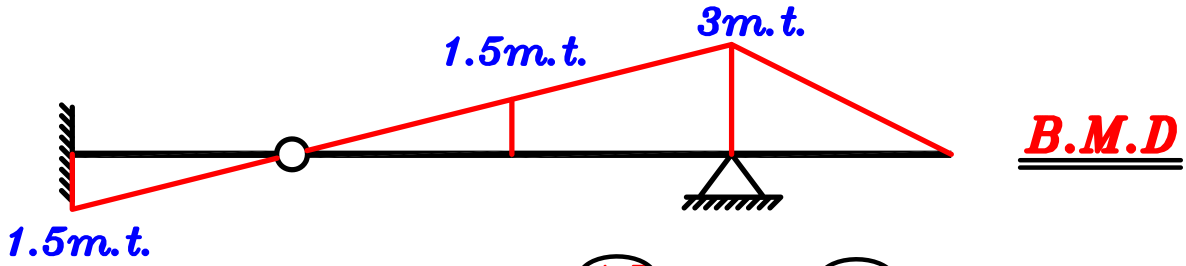
Beam (2)

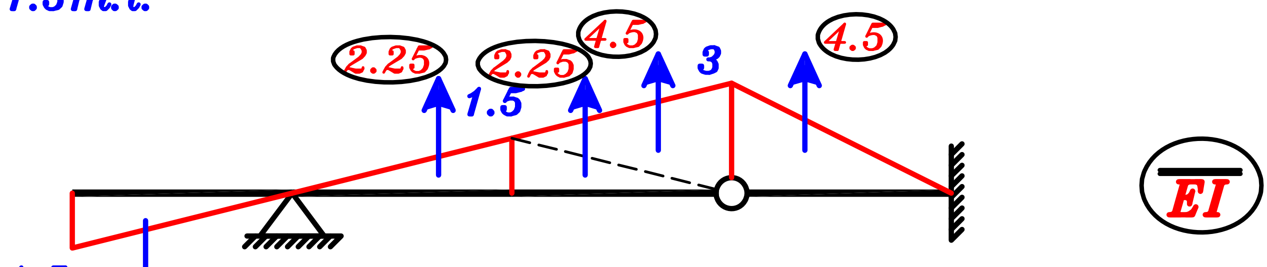
نحسب الـ deflection عند نقطة (C) و يفضل حساب باقى مطاليب المسألة لاننا سوف نحتاج الى حسابها فى النهاية .



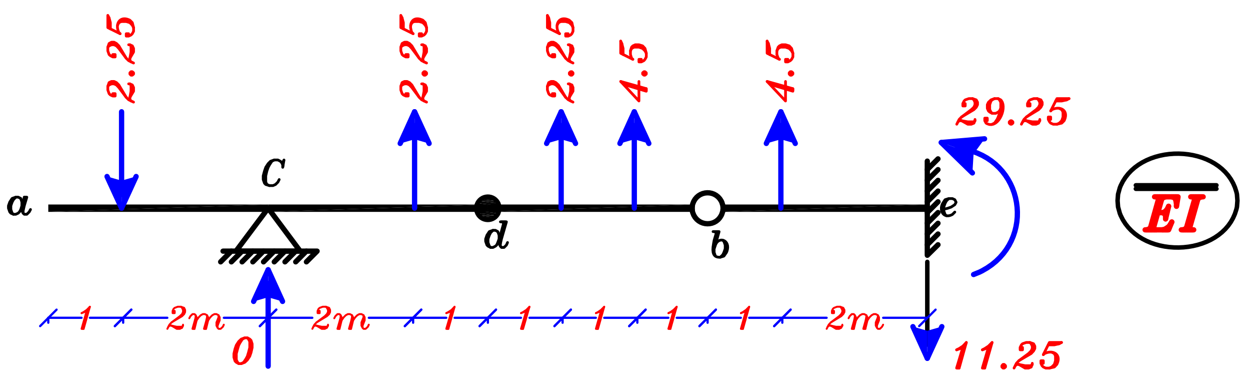
يفضل عند حل هذه الكمرة أن نضع مكان الـ P قوة 1t لتسهيل الحل مع العلم أن أى حاجة محسوبة فى هذه الكمرة سوف نضربها فى الـ P .







Conjugate Beam



Conjugate Beam

$$\# \; Y_C = \frac{1}{EI}[-2.25 * 2](P) = -\frac{4.5}{EI}(P)$$

$$\# \; \Delta \alpha_C = \frac{0}{EI}(P)$$

$$\# \; \grave{Y}_d = \alpha_d = [2.25 - 2.25](P) = \frac{0}{EI}(P)$$

$$\# \; Y_d = -\frac{9}{EI}(P)$$

$$\# \; \grave{Y}_e = \alpha_e = \frac{11.25}{EI}(P)$$

$$\# \; Y_e = \frac{29.25}{EI}(P)$$

$$\# \; \grave{Y}_b = \alpha_b = \frac{6.75}{EI}(P)$$

$$Y_C \; (Beam1) + Y_C \; (Beam2) = 0$$

$$\frac{72}{EI} - \frac{4.5}{EI}(P) = 0 \Longrightarrow \boxed{P = 16t}$$

و لحساب باقى المطاليب نجمع قيمهم من الكمرة الاولى و الثانية فنحصل على قيم الكمرة الاصلية

$$\# \; \Delta \alpha_C = \frac{30}{EI} + \frac{0}{EI}(16) = \frac{30}{EI}$$

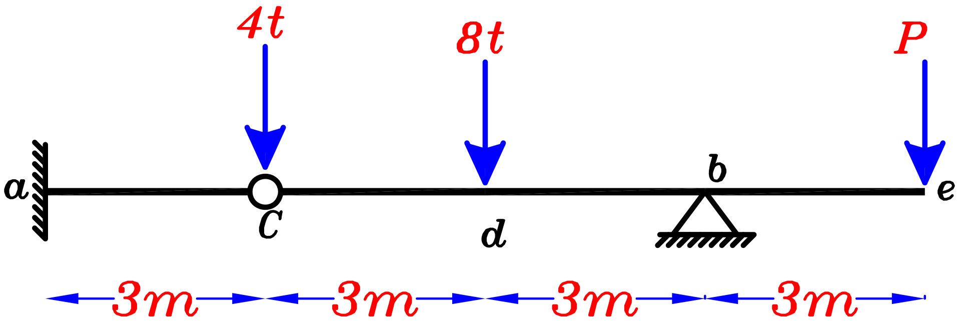
$$\# \; \grave{Y}_d = \alpha_d = -\frac{12}{EI} + \frac{0}{EI}(P) = -\frac{12}{EI}$$

$$\# \; Y_d = \frac{72}{EI} - \frac{9}{EI}(16) = -\frac{72}{EI}$$

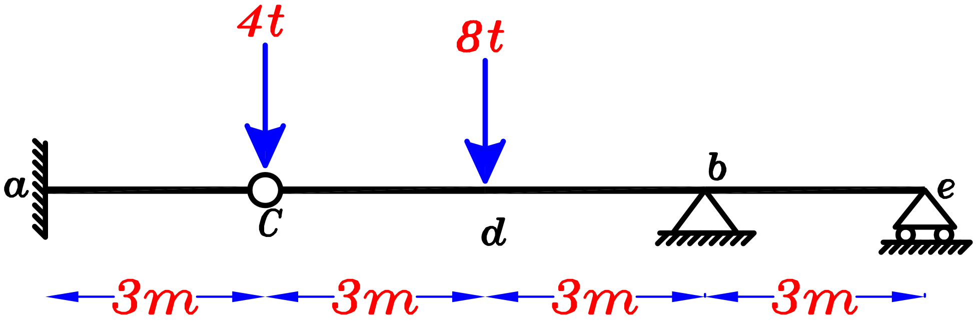
$$\# \; \grave{Y}_e = -\frac{30}{EI} + \frac{11.25}{EI}(16) = \frac{150}{EI}$$

$$\# \; Y_e = -\frac{90}{EI} + \frac{29.25}{EI}(16) = \frac{378}{EI}$$

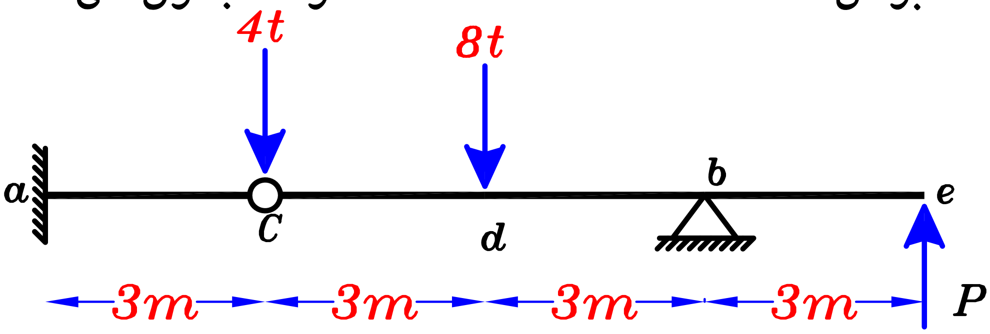
$$\# \; \grave{Y}_b = -\frac{30}{EI} + \frac{6.75}{EI}(16) = \frac{78}{EI}$$

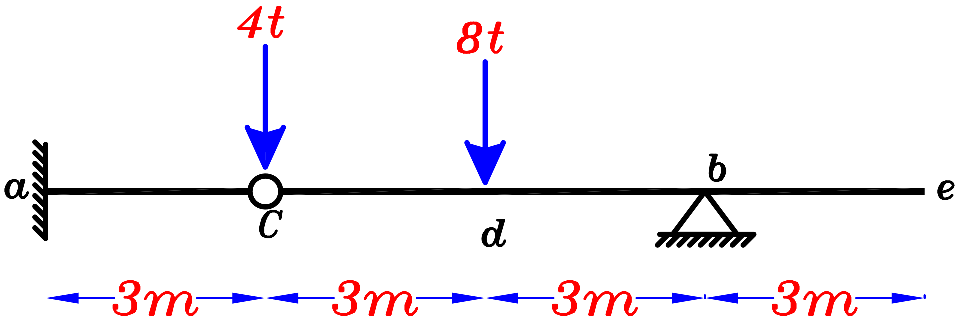


هذه المسألة من الممكن أن تطلب بشكل أخر

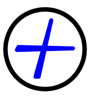


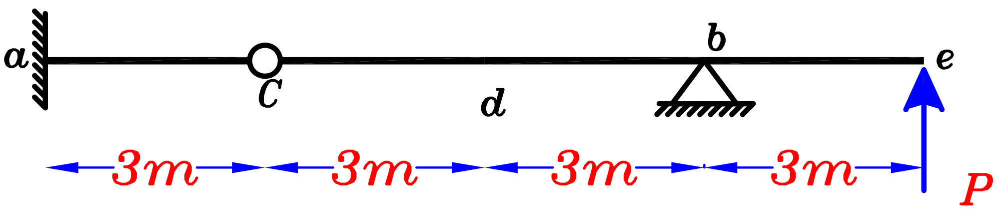
و فى هذه الحالة نعتبر أن الـ *Reaction* عند نقطة *E* هو المجهول فى المسألة





Beam (1)





Beam (2)

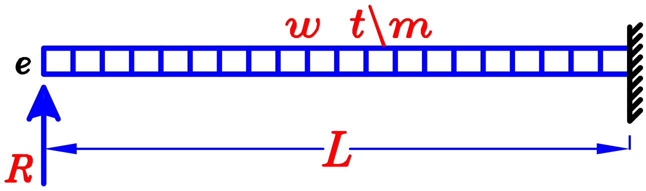
و لكن فى هذه الحالة احنا اللى حنحدد الـ *Condition* اللى حنستخدمها و فى هذه المسألة تكون $Y_e\ (Beam1) + Y_e\ (Beam2) = 0$

و ذلك لان نقطة (e) عندها *Roller* يمنع الحركة الرأسية .

و هذه هى أحد طرق حل الـ *Indeterminate structures* و سوف ندرسها الترم القادم ان شاء الله

Example:

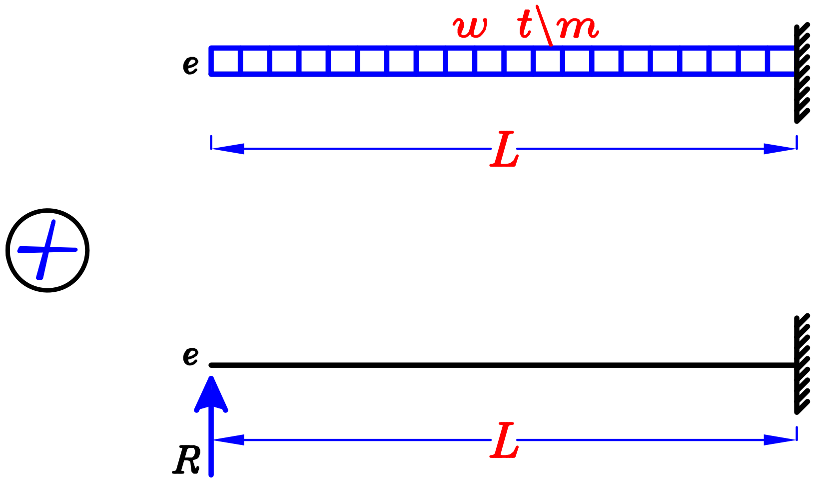
Determine the value of load (R) which makes $y_e = 0$ then draw the B.M.D & S.F.D. and the elastic line.



لتسهيل الحل يتم حل المسألة على أساس أنها كمرتين عن طريق عمل *Super position* .

كمرة عليها الاحمال المطلوبة + كمرة عليها الاحمال المعلومة

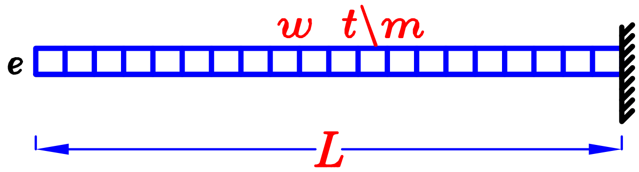
نحل كل كمرة على حدا و نجمع النتائج فى النهاية .

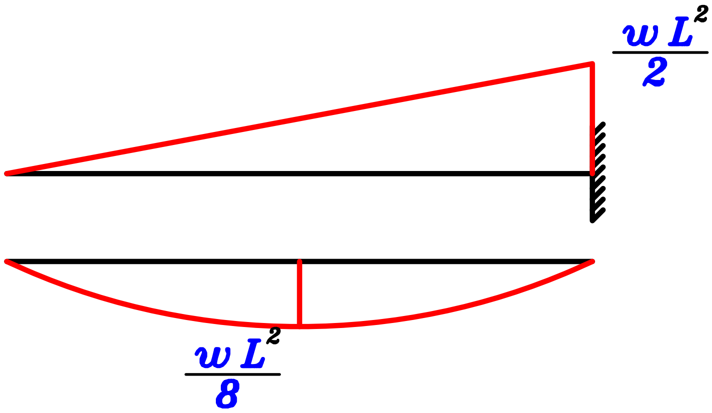


Beam (1)

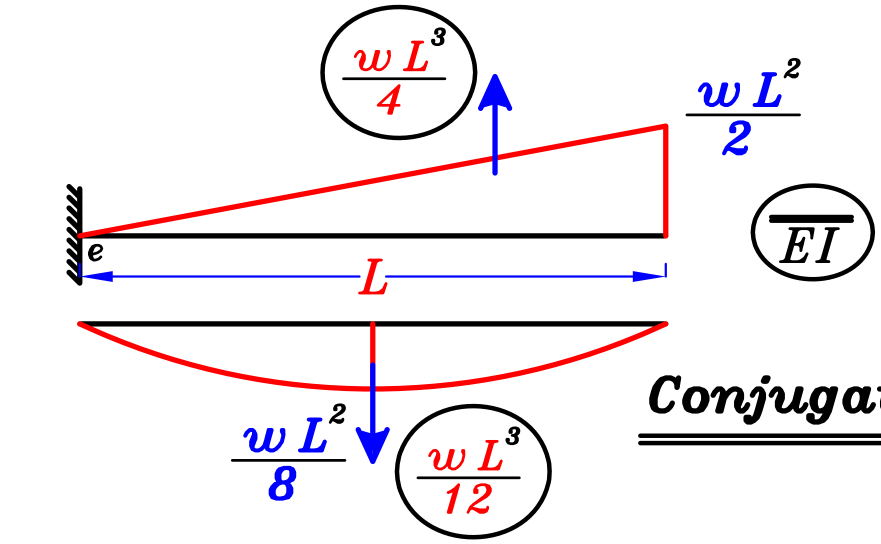
Beam (2)

Beam (1)

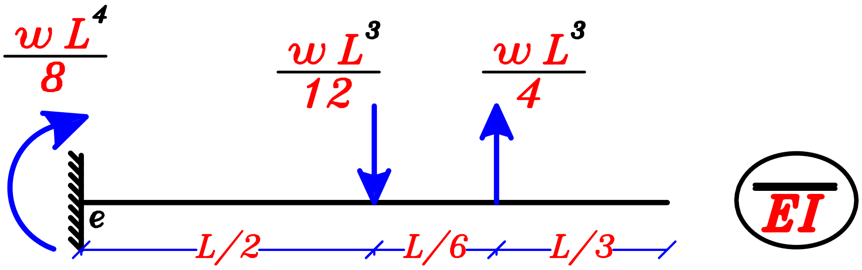




B.M.D



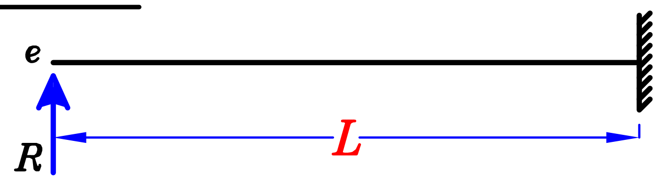
Conjugate Beam



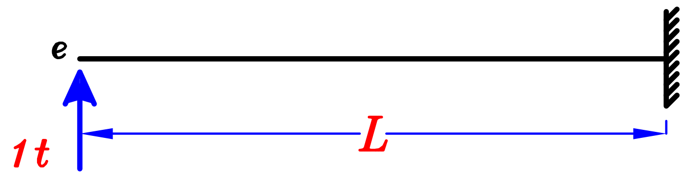
Conjugate Beam

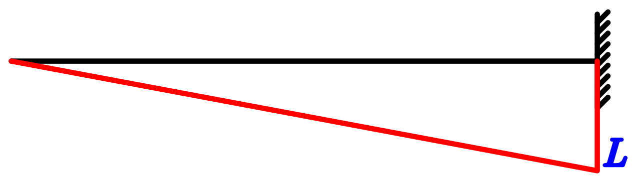
$$\# \; Y_e = \frac{1}{EI}\left[\frac{wL^3}{4} \times \frac{2L}{3} - \frac{wL^3}{12} \times \frac{L}{2}\right] = \frac{1}{EI} \quad \frac{wL^4}{8}$$

Beam (2)

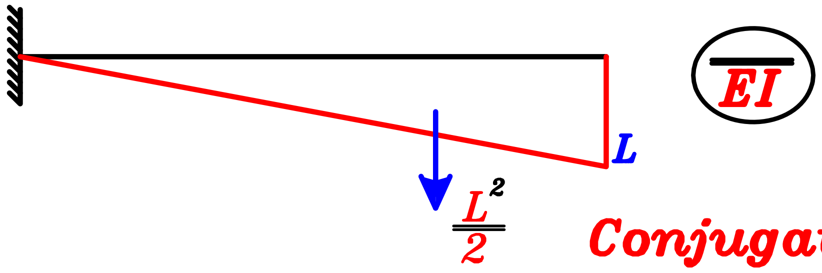


يفضل عند حل هذه الكمرة أن نضع مكان الـR قوة $1t$ لتسهيل الحل مع العلم أن أى حاجة محسوبة فى هذه الكمرة سوف نضربها فى الـR .

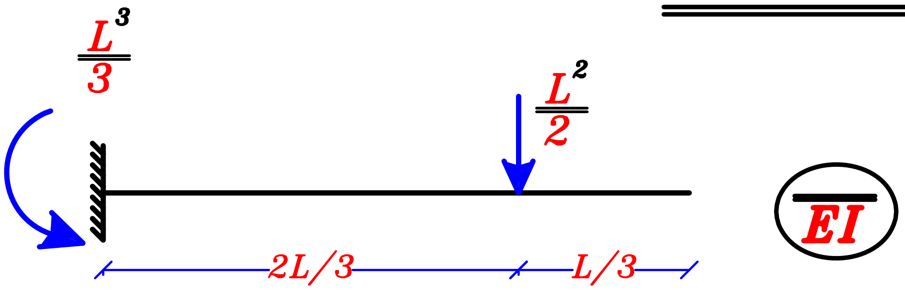




B.M.D



Conjugate Beam



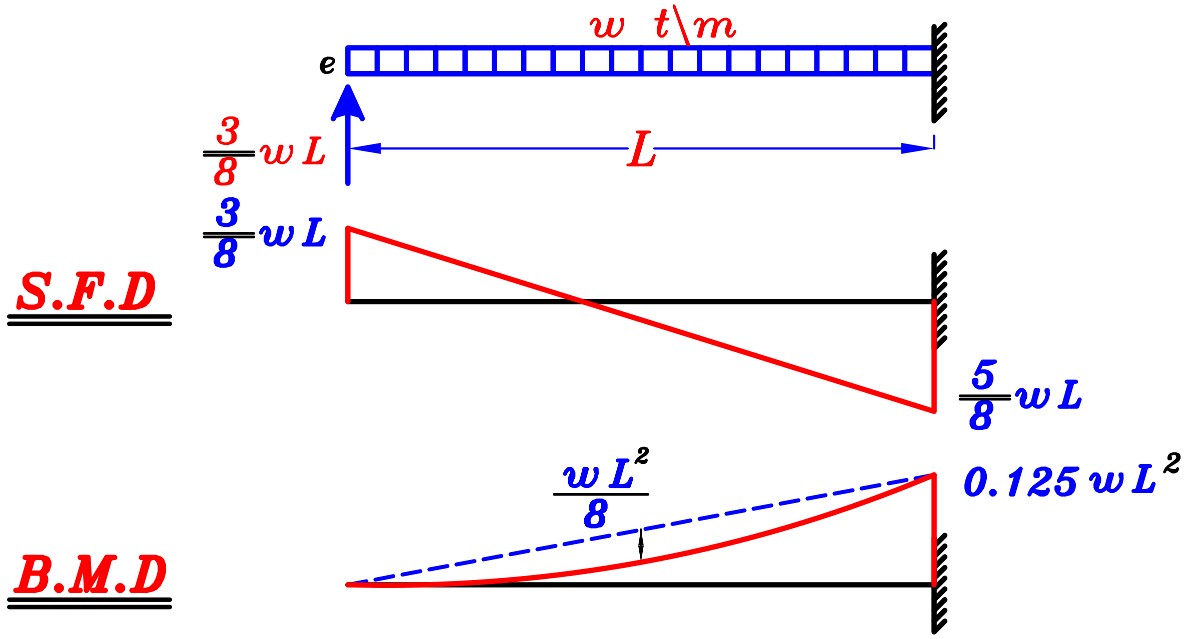
Conjugate Beam

$$\# \; Y_e = -\frac{1}{EI}\left[\frac{L^2}{2} \, x \, \frac{2L}{3}\right](R) = -\frac{1}{EI}\;\frac{L^3}{3}\,(R)$$

بعد حساب ال *deflection* من الكمرة الاولى عند نقطة *(e)*
و حساب ال *deflection* من الكمرة الثانية عند نقطة *(e)* نجمع
ال *deflection* عند نقطة *(e)* من الكمرتين و نساويه بال *deflection*
عند نقطة *(e)* فى الكمرة الاصلية أى يساوى صفر .

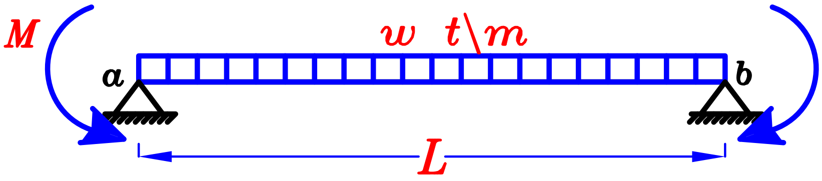
$$Y_e \;(Beam1) + Y_e \;(Beam2) = 0$$

$$\frac{1}{EI}\;\frac{wL^4}{8} - \frac{1}{EI}\;\frac{L^3}{3}(R) = 0 \Longrightarrow \boxed{R = \frac{3}{8} w L}$$



Example:

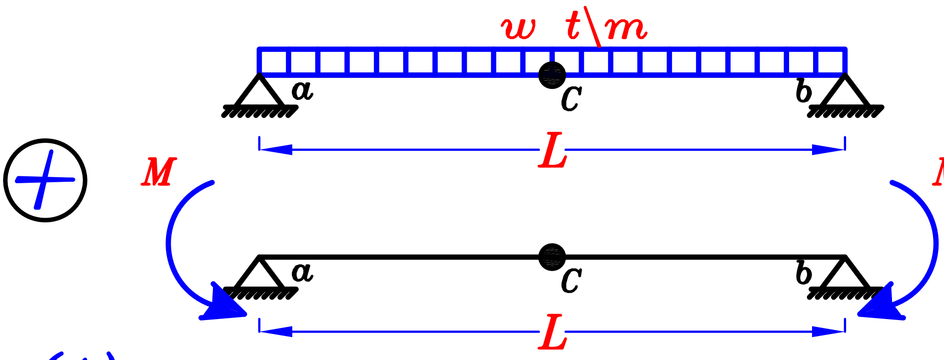
For the shown beam beam find the Value of moment (M) so that the slope angle at points a,b will be zero, and then Find the deflection at point C, and draw the S.F.D and B.M.D.



لتسهيل الحل يتم حل المسألة على أساس أنها كمرتين عن طريق عمل *Super position* .

كمرة عليها الاحمال المطلوبة + كمرة عليها الاحمال المعلومة

نحل كل كمرة على حدا و نجمع النتائج فى النهاية .

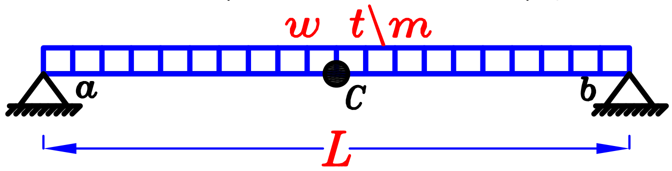


Beam (1)

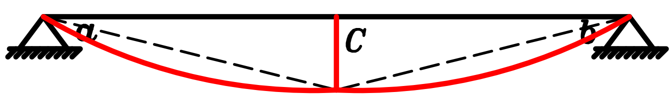
Beam (2)

Beam (1)

لابد من تقسيم الكمرة عند نقطة C عند رسم ال B.M.D و ذلك لان نقطة C مطلوب عندها حساب ال Deflection

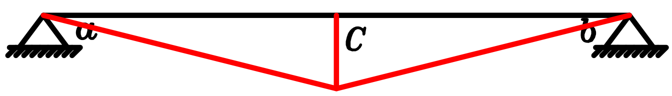


B.M.D



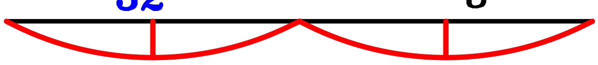
$$\frac{wL^2}{8}$$

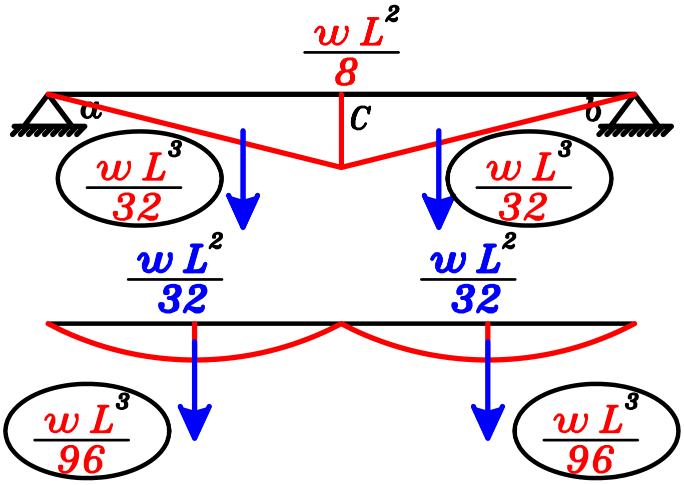
B.M.D

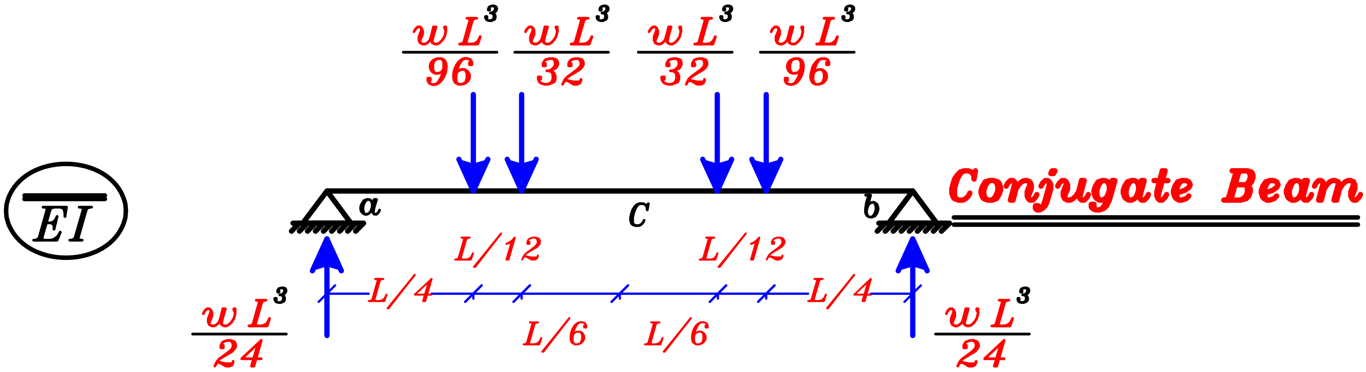


$$\frac{wL^2}{8}$$

$$\frac{wL^2}{32} \qquad \frac{w\left(\frac{L}{2}\right)^2}{8} = \frac{wL^2}{32}$$



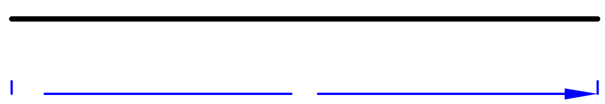




$$\# \; Y_C = \frac{1}{EI}\left[\frac{wL^3}{24} \times \frac{L}{2} - \frac{wL^3}{96} \times \frac{L}{4} - \frac{wL^3}{32} \times \frac{L}{6}\right]$$

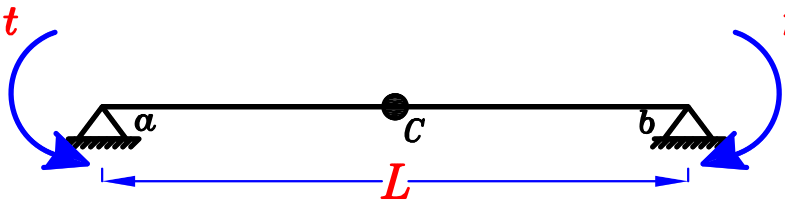
$$= \frac{1}{EI} \; \frac{5}{384} \; wL^4 \qquad \# \; Y'_a = \alpha_a = \frac{1}{EI} \; \frac{wL^3}{24}$$

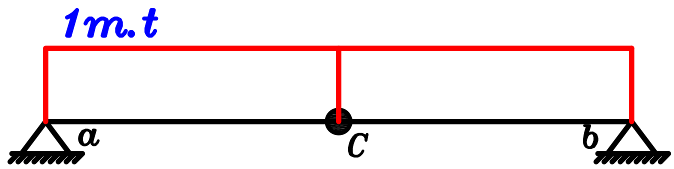
Beam (2)



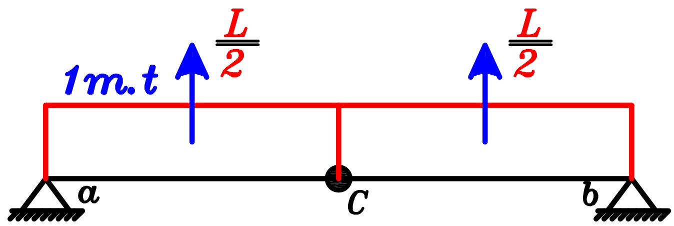
حل مع العلم أن ←

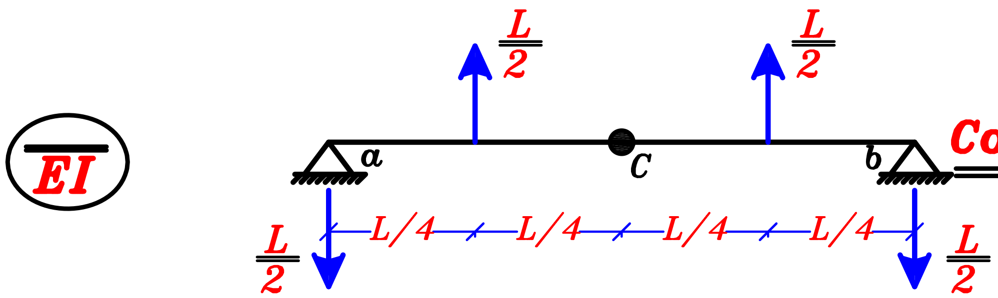
أى حاجة محسوبة فى هذه الكمرة سوف نضربها فى الـ M.





B.M.D





Conjugate Beam

$Y_C = \frac{1}{EI}[-\frac{L}{2} x \frac{L}{2} + \frac{L}{2} x \frac{L}{4}](M) = -\frac{1}{EI}\ \frac{L^2}{8}(M)$

$Y'_a = \alpha_a = -\frac{1}{EI}\ \frac{L}{2}\ (M)$

Y'_a **(Beam1)** $+$ Y'_a **(Beam2)** $= 0$

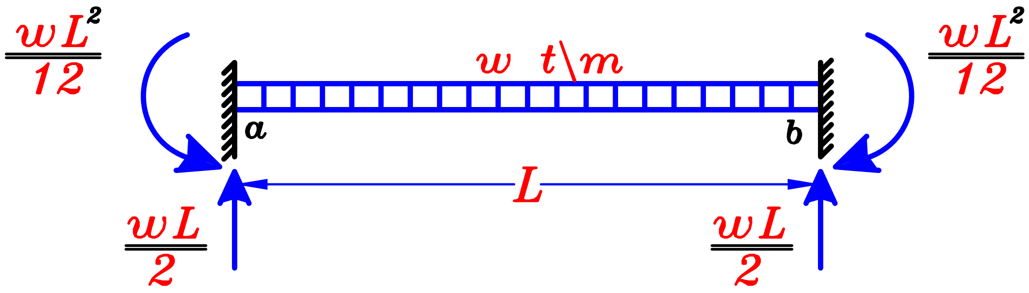
$$\frac{1}{EI}\ \frac{wL^3}{24} - \frac{1}{EI}\ \frac{L}{2}(M) = 0 \Longrightarrow \boxed{M = \frac{wL^2}{12}}$$

Y_C = max. deflection = Y_C (Beam1) + Y_C (Beam2)

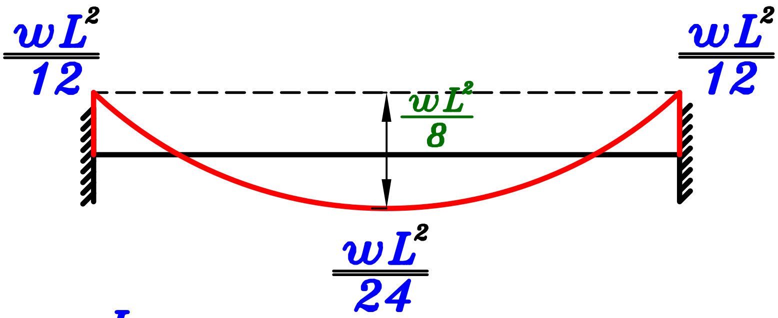
$$= \frac{1}{EI}\ \frac{5}{384}\, w\, L^4 - \frac{1}{EI}\ \frac{L^2}{8}(M)$$

$$= \frac{1}{EI}\ \frac{5}{384}\, w\, L^4 - \frac{1}{EI}\ \frac{L^2}{8}(\frac{wL^2}{12})$$

$$= \frac{1}{EI}\ \frac{1}{384}\, w\, L^4$$

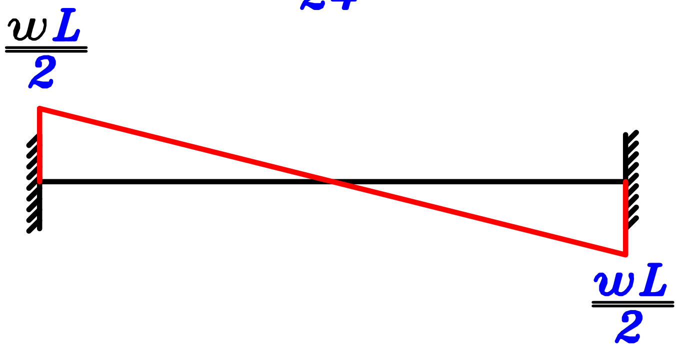


$\frac{wL^2}{12}$
$w \ t\backslash m$
$\frac{wL^2}{12}$
a
b
L
$\frac{wL}{2}$
$\frac{wL}{2}$



$\frac{wL^2}{12}$
$\frac{wL^2}{12}$
$\frac{wL^2}{8}$
$\frac{wL^2}{24}$

B.M.D



$\frac{wL}{2}$
$\frac{wL}{2}$

S.F.D

١- من شكل ال *Elastic loads* يمكن تحديد المكان الذى به ال *Zero shear* فى الكمرة ال *Conjugate*.

٢- نحسب ال *moment* فى هذه المنطقة كدالة فى ال *X* .

٣- نرسم ال *B.M.D.* فى هذه المنطقة كدالة فى ال *X* .

٤- نحسب ال *Elastic loads* فى هذه المنطقة كدالة فى ال *X* .

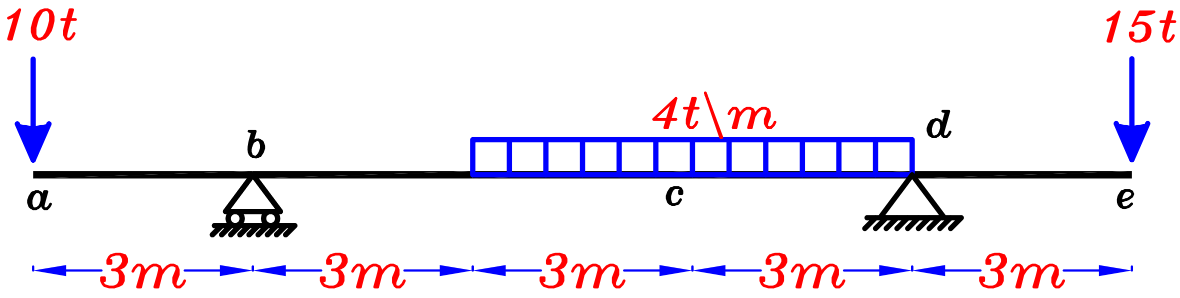
٥- نحسب معادلة ال *Shear* فى هذه المنطقة .

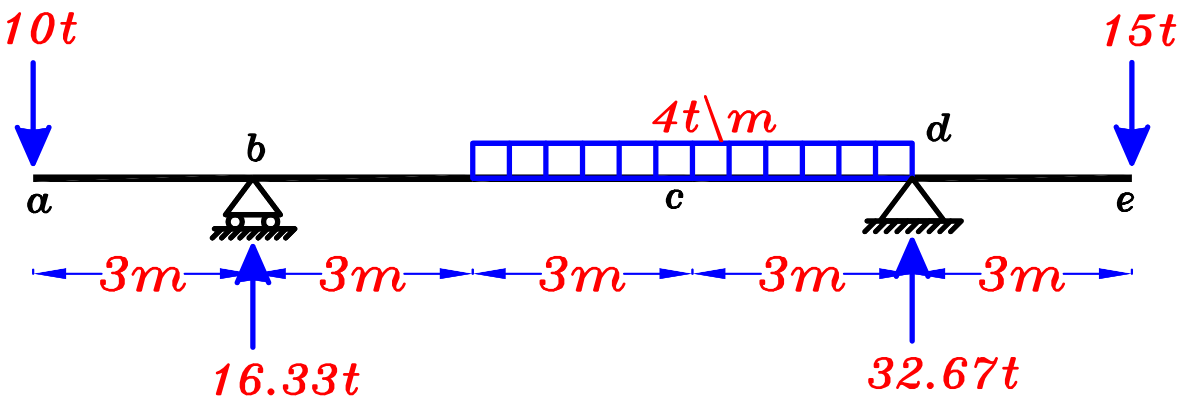
٦- نساوى معادلة ال *Shear* نساوى معادلة ال *X* .

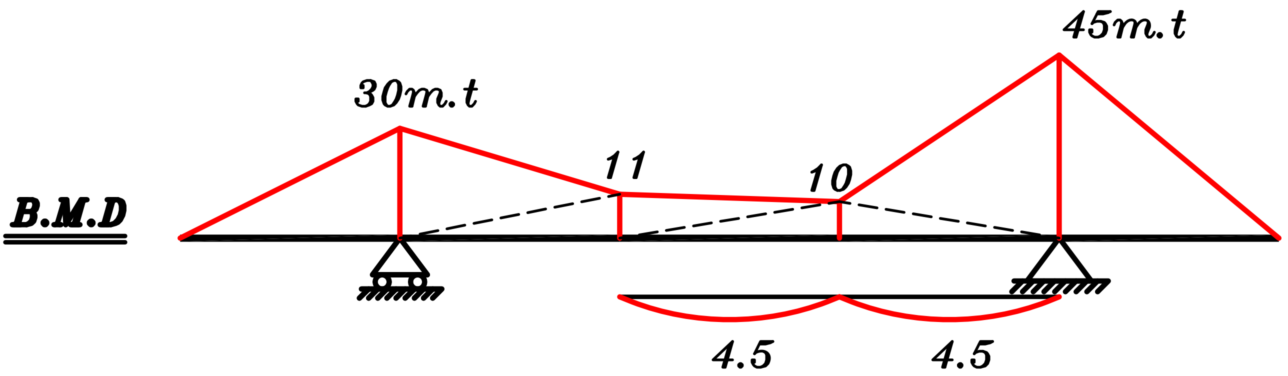
٧- نحسب ال *moment* فى الكمرة ال *Conjugate* عند ال *X* فيكون هو ال *max. moment* فى الكمرة ال *Conjugate* أى أنه ال *max. deflection* فى الكمرة الاصلية .

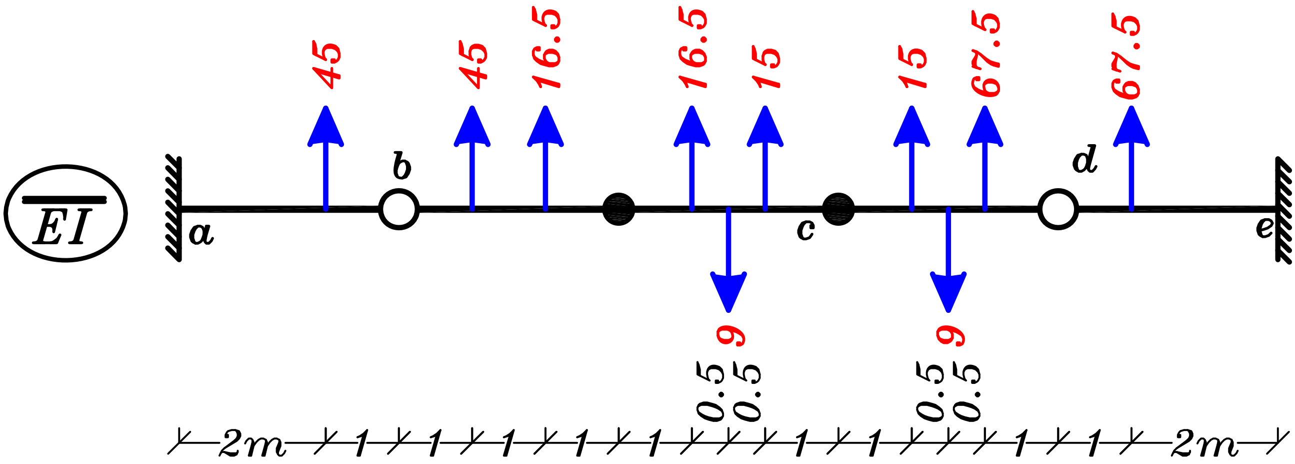
Example:

For the shown beam find the value and the position of the maximum deflection.

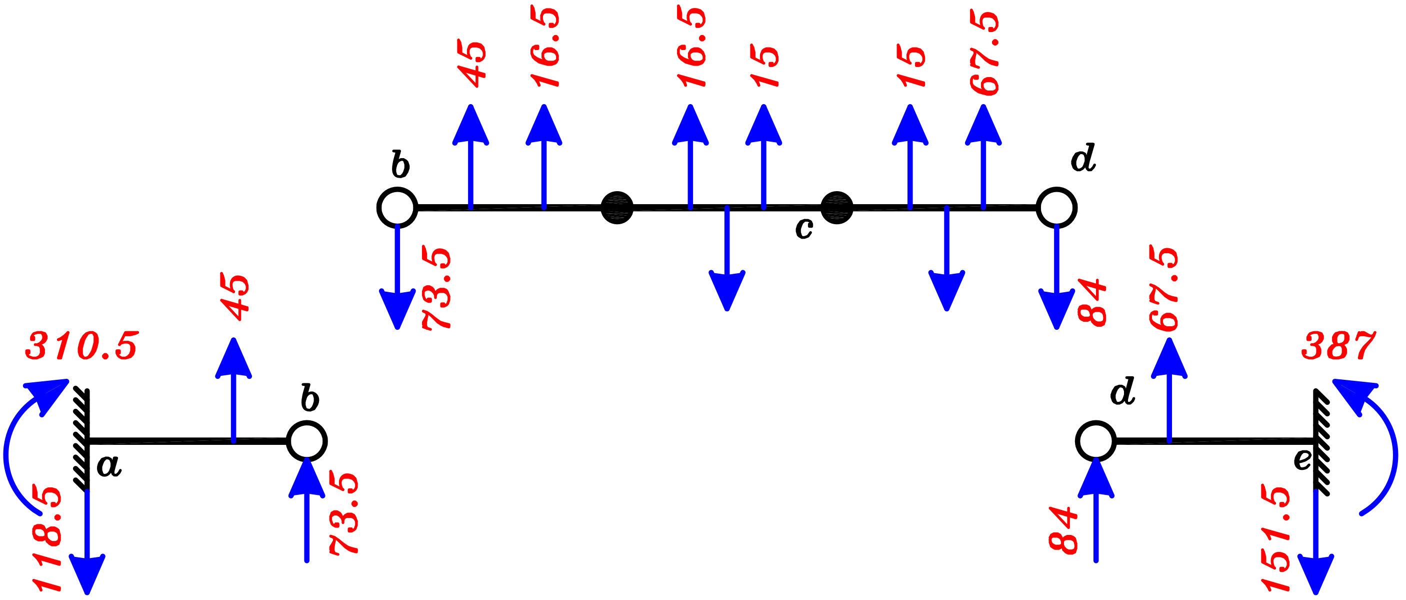






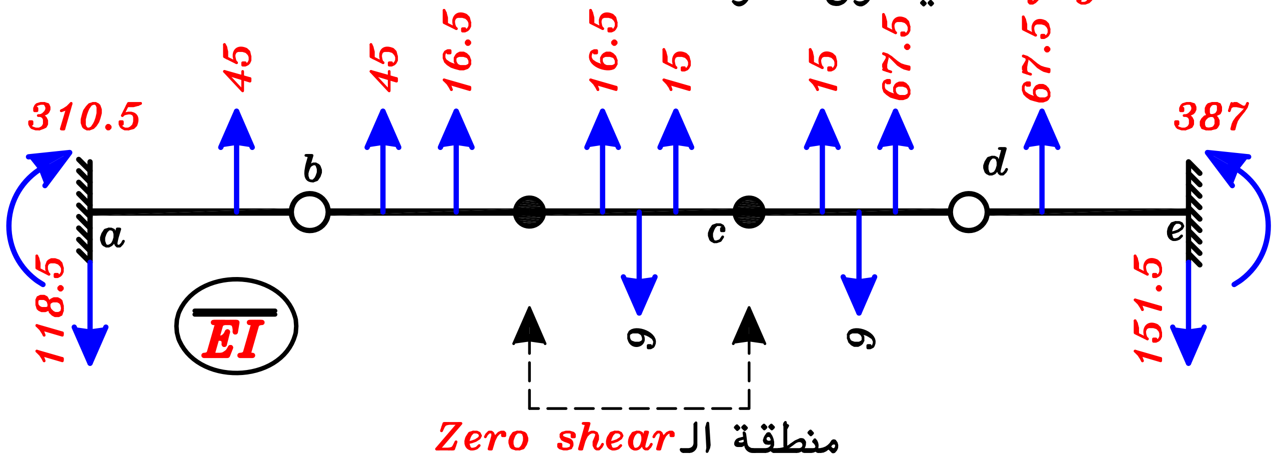


Conjugate Beam

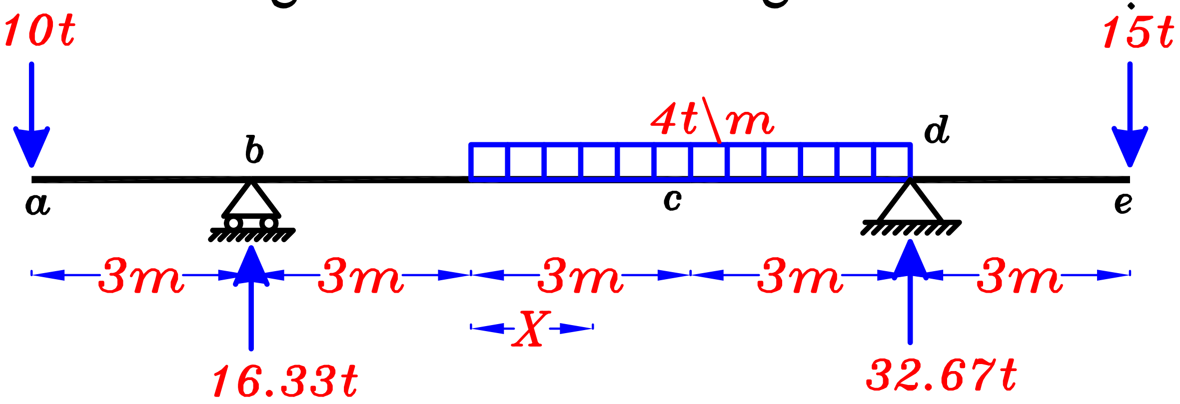


١- من شكل الـ *Elastic loads* يمكن تحديد المكان الذى به الـ*Zero shear* فى الكمرة الـ *Conjugate*.

و هو المنطقة بين أى *2 Joints* و التى يكون فيها مجموع القوى الرأسية للـ *Conjugate beam* يساوى صفر



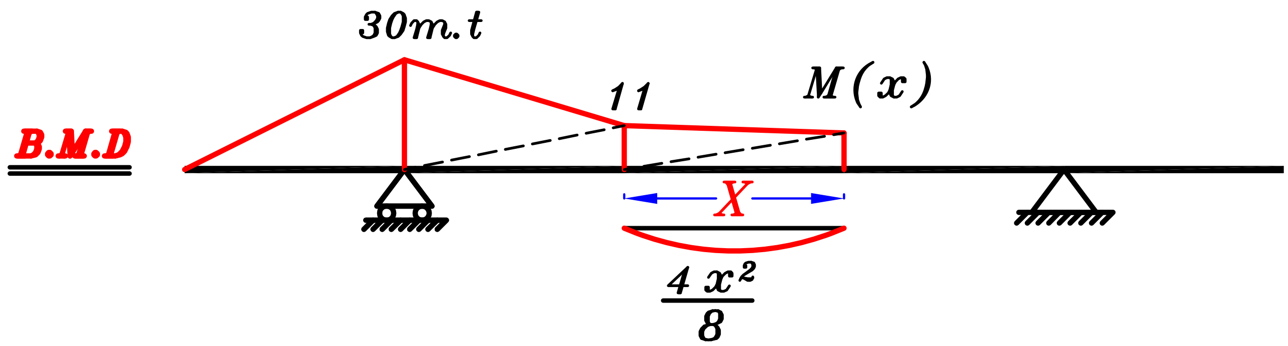
٢- نحسب الـ *moment* فى هذه المنطقة كدالة فى الـ *X* .



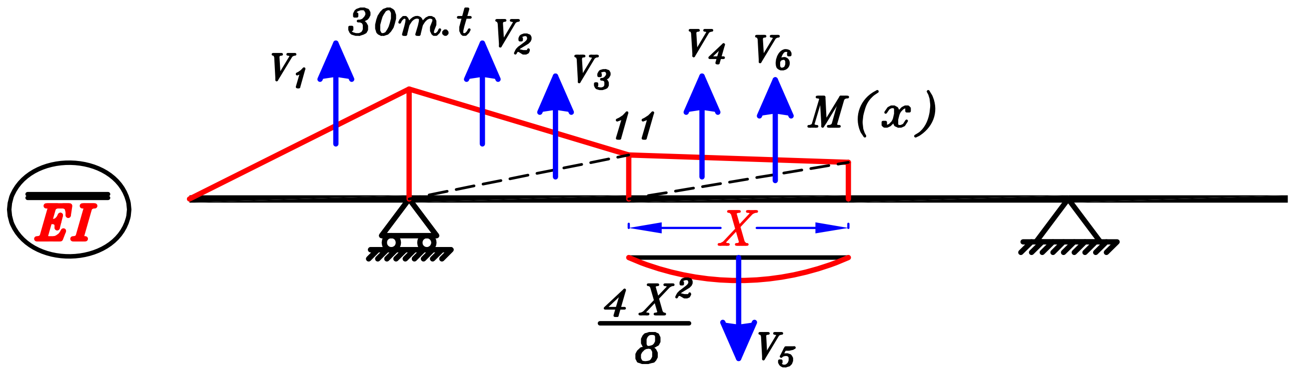
$$\boldsymbol{M}(x) = 10\,(6 + x) - 16.33\,(3 + x) + 4\,(x)\,(x/2)$$

$$\boldsymbol{M}(x) = 11 - 6.33\,(x) + 2\,(x)^2$$

٣- نرسم ال $B.M.D.$ فى هذه المنطقة كدالة فى الـ X .



٤- نحسب ال $Elastic\ loads$ فى هذه المنطقة كدالة فى ال X .



$\# \; V_1 = 45$

$\# \; V_2 = 45$

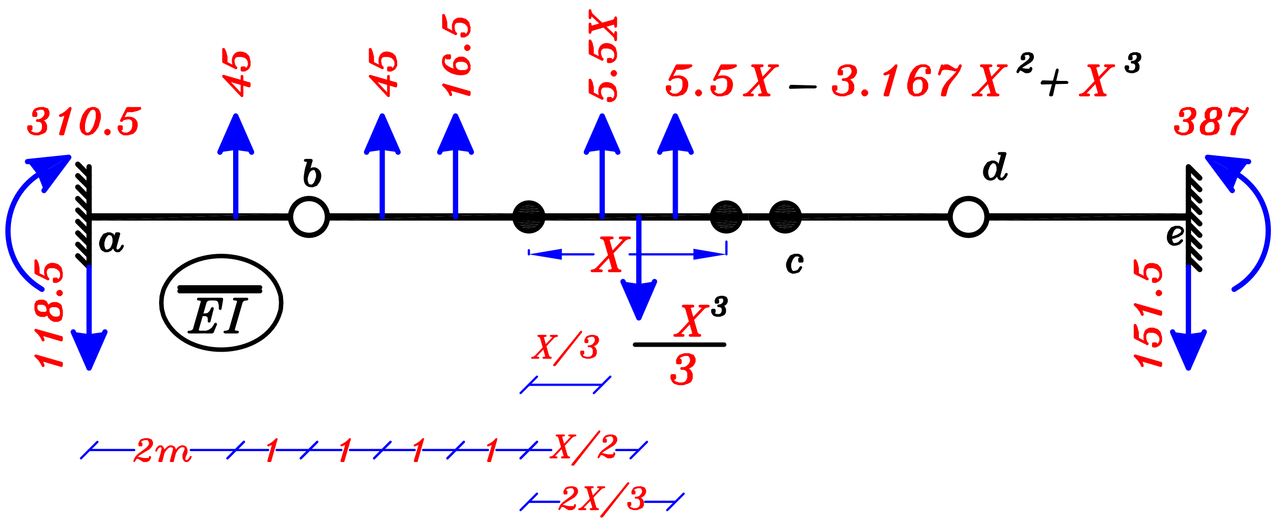
$\# \; V_3 = 16.5$

$\# \; V_4 = \frac{1}{2} * 11 * X = 5.5 \; X$

$\# \; V_5 = \frac{2}{3} * \frac{4 X^2}{8} * X = \frac{X^3}{3}$

$\# \; V_6 = \frac{1}{2} * M(x) * X = 5.5X - 3.167 X^2 + X^3$

٥- نحسب معادلة الـ$Shear$ فى هذه المنطقة .



$$Q(x) = -118.5 + 45 + 45 + 16.5 + 5.5X - \frac{X^3}{3}$$
$$+ 5.5X - 3.167X^2 + X^3$$

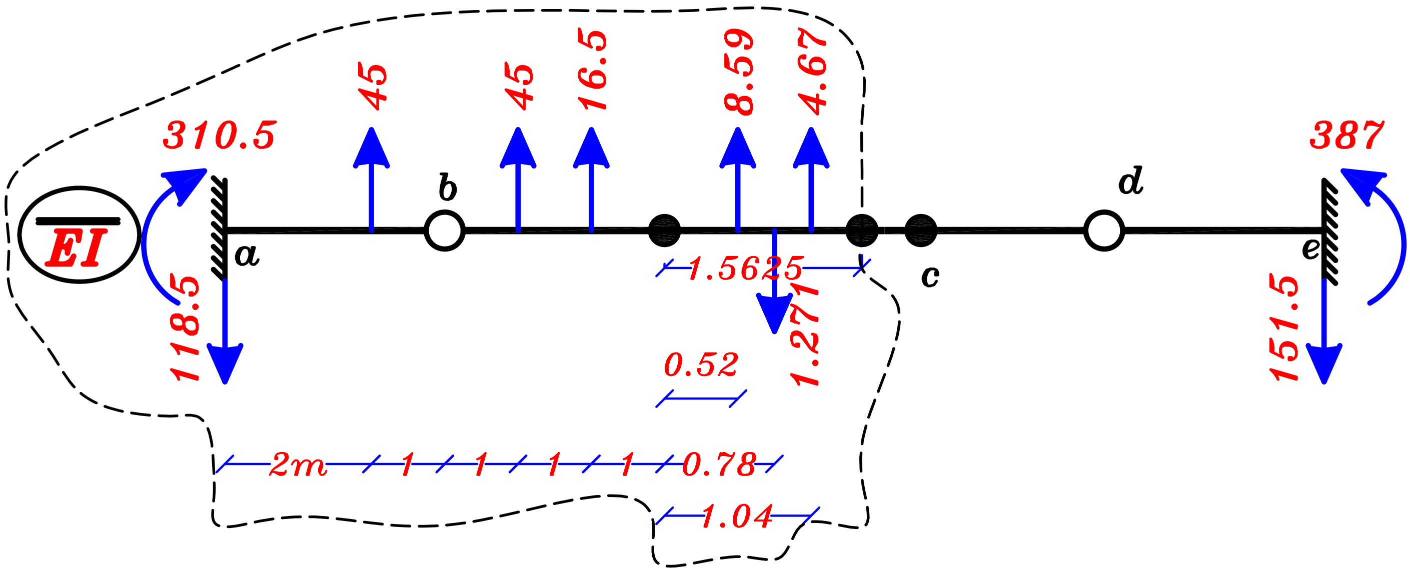
$$\boxed{Q(x) = \frac{2X^3}{3} - 3.167X^2 + 11X - 12}$$

٦- نساوى معادلة الـ*Shear* نساوى معادلة الـ *X* .

$$Q(x) = \frac{2X^3}{3} - 3.167X^2 + 11X - 12 = 0$$

$$\boxed{X = 1.5625}$$

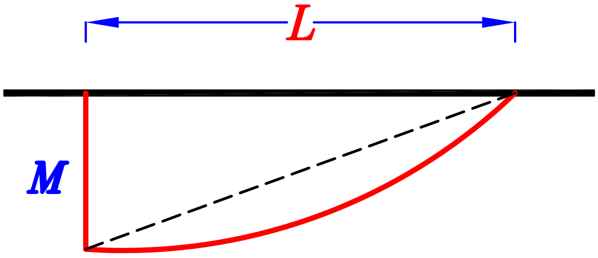
٧- نحسب الـ *moment* فى الكمرة الـ *Conjugate* عند الـ *X* فيكون هو الـ *max. moment* فى الكمرة الـ*Conjugate* أى أنه الـ *max. deflection* فى الكمرة الاصلية .

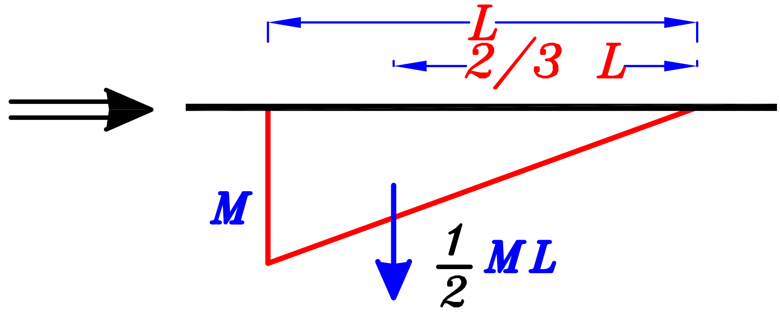


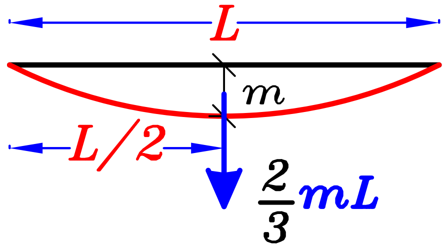
$$Y_{max.} = -\frac{123.6}{EI}$$ لاعلى

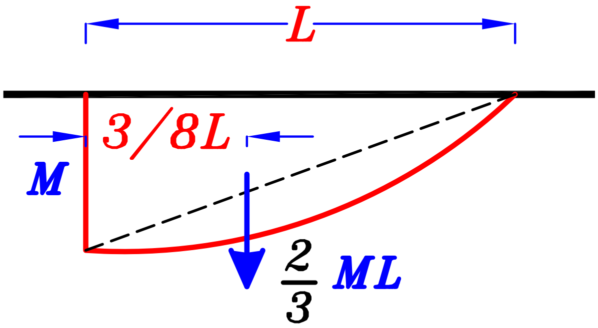
بعض الـ Elastic Loads التى يمكن استخدامها مباشرة

Uniform load

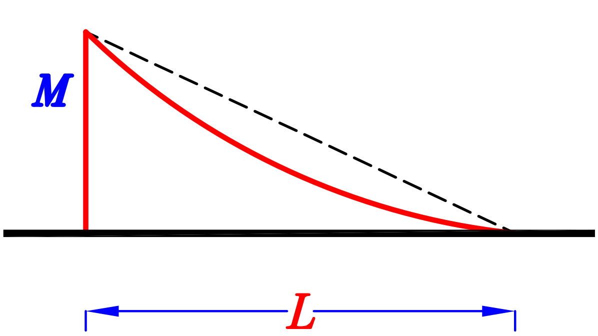


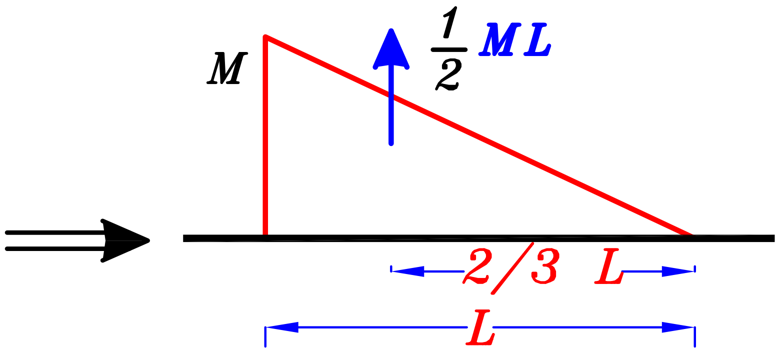


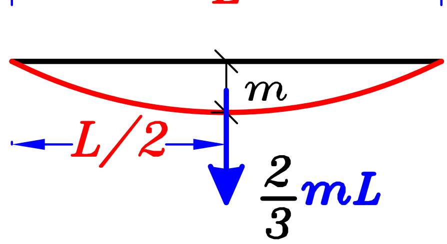


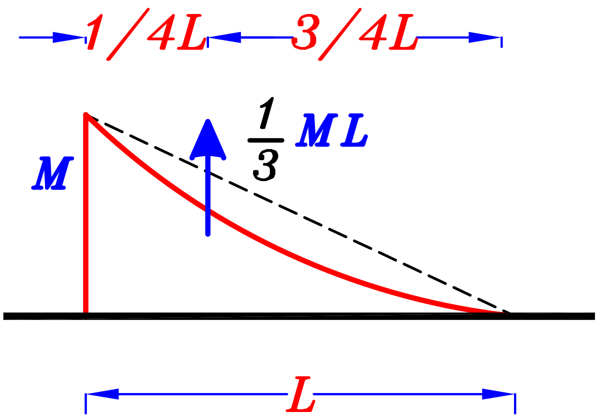


يمكن استخدامها مباشرة لانها ذكرت فى المحاضرة









يمكن استخدامها مباشرة لانها ذكرت فى المحاضرة

Non uniform load

كل اشكال ال *Parabola* السابقة ل *Uniform Load* اما فى حالة وجود *nonuniform Load* يكون كالاتى